

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Equazioni di Maxwell nel vuoto

In forma differenziale le equazioni di Maxwell diventano

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1)$$

(teorema di Gauss)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

(legge di Faraday - Lenz)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4)$$

(teorema di Ampère - Maxwell)

In linea di principio, conoscendo la distribuzione di carica e la densità di corrente in ogni punto dello spazio e ad ogni istante, dalla soluzione di queste equazioni si possono ricavare gli andamenti dei campi in qualsiasi situazione. Tutti gli esercizi di elettrostatica e magnetostatica rappresentano esempi particolari (e inconsapevoli!) di soluzione delle equazioni di Maxwell con particolari condizioni al contorno.

Per $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$, in assenza di cariche e correnti in un elemento di volume finito in cui si vogliono studiare i campi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (8)$$

Oltre alla soluzione banale (campi nulli sempre ed ovunque) si dimostra che esistono soluzioni oscillanti. Infatti, facendo il rotore della (7), abbiamo al primo membro

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) =$$

(per i teoremi di algebra vettoriale)

$$= -(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) =$$

(per la (5))

$$= -\nabla^2 \vec{E}$$

mentre al secondo membro

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) =$$

(per la (8))

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Quindi

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Analogamente si ottiene

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

La (9) e la (10) hanno la stessa forma matematica dell'equazione delle corde vibranti, in cui una perturbazione trasversale generata in un punto si propaga, per effetto della continuità del mezzo, lungo tutto il sistema meccanico. Si deduce da considerazioni dimensionali che $\mu_0 \epsilon_0$ dá l'inverso di una velocità al quadrato, per cui

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

deve rappresentare la velocità di propagazione della perturbazione elettromagnetica. La differenza sostanziale con l'analogo meccanico sta nel fatto che la propagazione delle onde e.m. non necessita di nessun supporto materiale.

Si dimostra che la classe di soluzioni fisiche non banali comprende essenzialmente funzioni oscillanti in modo armonico sia nel tempo che nello spazio, di cui riportiamo la forma generale:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(r) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (11)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(r) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (12)$$

Ricordiamo che la forma esplicita della soluzione dipende dalle condizioni al contorno associate al problema specifico e che essa può variare sensibilmente da caso a caso, tanto da descrivere onde generate da sorgenti puntiformi, da dipoli oscillanti o da sorgenti estese, onde stazionarie in una cavità, fasci gaussiani, fasci guidati in fibra, ecc..

Elenchiamo ora le caratteristiche salienti delle onde, specificando il significato dei termini che compaiono nella (11) e nella (12).

- L'onda e.m. consiste di un campo elettrico e di un campo magnetico fortemente accoppiati: i due vettori non sono scindibili, e hanno una stretta dipendenza reciproca, come vedremo meglio in seguito. Per questo, una volta chiarite le connessioni, potremo concentrarci su uno dei due vettori, senza ripetere le stesse considerazioni per l'altro.
- $\vec{E}_0(r), \vec{B}_0(r)$ rappresentano l'ampiezza dell'onda (vale a dire il massimo della perturbazione e.m. nello spazio) e, in generale, dipendono dalla posizione (per esempio r può essere la distanza dalla sorgente).
- Se ci mettiamo in un punto fissato dello spazio ($\vec{r} = \vec{r}_0$)

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(r_0) \cos[\omega t + \delta(\vec{r}_0)]$$

e vediamo che i campi oscillano armonicamente nel tempo con pulsazione

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

con ν frequenza e T periodo temporale. Se ω si misura in rad/s , ν viene espressa in Hz e T in s .

- Se invece consideriamo un istante fissato ($t = t_0$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(r) \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha(t_0)]$$

e vediamo che i campi oscillano armonicamente nello spazio con pulsazione di modulo

$$k = 2\pi\nu' = \frac{2\pi}{\lambda}$$

con λ periodo spaziale e ν' frequenza spaziale (o numero d'onda). Solitamente ν' viene usato solo in ambito spettroscopico e valutato in cm^{-1} , mentre λ viene comunemente indicato in $nm, \mu m, mm$, ecc. a seconda del tipo di radiazione studiata. \vec{k} prende il nome di vettore d'onda; la sua direzione indica la direzione di propagazione della perturbazione ondosa.

- I campi oscillano in ogni punto dello spazio *in fase*.
- Consideriamo ora per semplicità onde di ampiezza uniforme. Allora dalla (7) si ricava

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

e dalla (8)

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$

il che significa che i vettori $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ sono mutuamente ortogonali. Perciò i campi oscillano trasversalmente rispetto alla propagazione dell'onda, punto per punto ed istante per istante.

- Inoltre dall'equazione precedente si deduce che

$$\frac{\omega}{k} = \nu\lambda = c$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}.$$

La prima specifica che le periodicità temporale e spaziale sono correlate, la seconda che anche i moduli delle ampiezze non sono indipendenti.

- Le equazioni di Maxwell nello spazio aperto (infinito) non pongono nessun limite (superiore o inferiore) ai valori di frequenza/lunghezza d'onda. In effetti lo spettro elettromagnetico è uno spettro continuo e il limite superiore ai valori di pulsazione è di tipo sperimentale, non teorico. Per praticità, si suddivide lo spettro e.m. in bande i cui estremi non hanno valori assegnati con precisione e che corrispondono al nostro impiego della radiazione: onde radio, microonde, infrarosso, luce visibile, ultravioletto, raggi X, raggi γ sono tutte onde elettromagnetiche, per quanto diverse possano sembrarci. È chiaro che onde così diverse sono generate da sistemi fisici in condizioni molto diverse. Ricordiamo che non si è ancora affrontato il problema della *generazione* delle onde. Inoltre va tenuto presente che un sistema finito produce in generale un numero *discreto e selezionato* di frequenze, come accade per le onde stazionarie di una corda vibrante vincolata ad entrambi gli estremi.
- Un'onda che contiene una singola frequenza è detta onda monocromatica e di questo abbiamo finora parlato: in realtà onde veramente monocromatiche (cioè onde il cui spettro è una delta di Dirac) non esistono se non come caso ideale. Ogni onda contiene una porzione finita, per quanto stretta, dello spettro e.m. ed è quindi un *pacchetto d'onde*, vale a dire una radiazione emessa per un tempo finito e che trasporta varie frequenze. Il fatto di analizzare onde monocromatiche non diventa tuttavia una reale limitazione; le equazioni di Maxwell sono equazioni lineari e per questo vale il famoso teorema di sovrapposizione degli effetti, che si usa in pratica fin dai primi esercizi sulla forza di Coulomb. Se due funzioni sono soluzioni delle equazioni, ogni loro combinazione lineare lo è, e viceversa. In secondo luogo i teoremi di scomposizione spettrale di Fourier ci consentono di trasformare un qualsiasi pacchetto d'onde nella somma di termini rigorosamente monocromatici. Per questo, discutendo di onde "semplici", non abbiamo affatto perso di generalità.

Descriviamo ora due diversi "tipi" di onda, distinguibili per la loro "configurazione spaziale", ovvero due particolari soluzioni delle equazioni di Maxwell con appropriate condizioni al contorno. Queste onde non esauriscono assolutamente le possibilità!!

ONDE PIANE

Sono le onde in cui le ampiezze (in modulo!!) non dipendono dalla posizione: i fronti d'onda, ovvero le superfici su cui, ad un dato istante, i campi assumono lo stesso valore (vettoriale!!), sono piani paralleli. Il vettore d'onda punta ovunque nella stessa direzione, ovviamente ortogonale ai fronti d'onda piani: per comodità possiamo allora scegliere un sistema di riferimento cartesiano in cui

$$\vec{k} = k\hat{x}$$

per cui $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$ e obbligatoriamente \vec{E}, \vec{B} devono oscillare nel piano yz .

ONDE SFERICHE

In questo caso le superfici su cui, ad un dato istante, i campi assumono lo stesso valore (vettoriale!!) sono sfere concentriche. Il vettore d'onda punta in direzione radiale (rispetto alla sorgente che genera la perturbazione, supposta a grande distanza dal volume studiato),

$$\vec{k} = k\hat{r}$$

mentre si dimostra che

$$E_\theta \propto \frac{\sin\theta \cos(kr - \omega t)}{r}$$

$$H_\phi \propto \frac{\sin\theta \cos(kr - \omega t)}{r}$$

dove θ, ϕ sono gli angoli di un generico sistema di coordinate sferiche

POLARIZZAZIONE DELLE ONDE

Resta in generale indeterminata la *direzione* lungo cui i campi oscillano nel piano di vibrazione. Questa caratteristica individua la *polarizzazione* dell'onda.

Supponiamo per semplicità di avere un'onda piana, con propagazione lungo l'asse x . Allora nel caso generale

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_x(\vec{r}, t), E_y(\vec{r}, t), E_z(\vec{r}, t)) = (0, E_y^0 \cos(kx - \omega t + \phi_y), E_z^0 \cos(kx - \omega t + \phi_z)) \quad (13)$$

dove il tipo di polarizzazione viene definito dalla differenza di fase $\phi = \phi_z - \phi_y$ e dal rapporto tra E_z^0 e E_y^0 .

- Polarizzazione lineare

Si ottiene per $\phi = 0, \phi = \pi$. Infatti in questo caso si può scrivere

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t + \phi_y) = (0, E_y^0 \cos(kx - \omega t + \phi_y), \pm E_z^0 \cos(kx - \omega t + \phi_y))$$

ovvero in qualunque punto dello spazio il campo elettrico varia armonicamente nel tempo in direzione fissata da \vec{E}_0 e quindi parallela al piano $z = \pm (E_z^0/E_y^0)y$. In particolare, se ve ne fosse il bisogno, con una rotazione degli assi, si potrebbero portare i campi \vec{E}, \vec{B} a coincidere con y, z .

- Polarizzazione circolare

Quando

$$E_z^0 = E_y^0$$

$$\phi = \pm \frac{\pi}{2}$$

il campo elettrico diventa

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (0, E_y^0 \cos(kx - \omega t + \phi_y), \pm E_y^0 \sin(kx - \omega t + \phi_y))$$

per cui il vettore resta di lunghezza costante (pari al modulo $\sqrt{E_y^{02} + E_z^{02}}$) mentre la sua punta descrive con velocità angolare ω una circonferenza che, se osservata guardando la

sorgente di emissione, risulta percorsa in senso orario in un caso e in senso antiorario nell'altro. Perciò si parla di polarizzazione circolare rispettivamente destra e sinistra oppure di onda *destrogira* o ad *elicitá negativa* e di onda *levogira* o ad *elicitá positiva*. Vale la relazione

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \pm \omega \hat{x} \times \vec{E} \quad (14)$$

- Polarizzazione ellittica

Nel caso piú generale, la condizione di polarizzazione si deduce eliminando dalla (13) la fase $kx - \omega t$. Si dimostra (provate questo "simpatico" esercizio di trigonometria e algebra!!) che

$$\frac{E_y^2}{E_y^0{}^2} + \frac{E_z^2}{E_z^0{}^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_y^0 E_z^0} \cos \phi = \sin^2 \phi$$

Nelle variabili definite dalle componenti del campo elettrico, tale equazione descrive un'ellisse il cui asse maggiore é ruotato rispetto a E_y di un angolo $\beta/2$ definito da

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2E_y^0 E_z^0 \cos \phi}{E_y^0{}^2 - E_z^0{}^2}.$$

La punta del vettore ruota quindi con velocità angolare ω disegnando un'ellisse. L'onda é destrogira per $-\pi \leq \phi_z - \phi_y \leq 0$, levogira per $0 \leq \phi_z - \phi_y \leq \pi$.

Guardando alla (13) deve comunque essere chiaro che un'onda di polarizzazione ellittica può essere interpretata come sovrapposizione di due campi polarizzati linearmente secondo y e z . Ovviamente i casi di polarizzazione discussi in precedenza sono casi particolari in cui l'ellisse degenera in una circonferenza o in un segmento di retta.

PROPRIETA' DELLE ONDE CLASSICHE: INTERAZIONE CON LA MATERIA CARICA

QUANTITA' DI MOTO DELLA RADIAZIONE

Studiamo come al solito un'onda piana monocromatica che si propaga in direzione delle x positive; supponiamo che l'onda "investa" una o piú cariche q che non "vedano" la variazione spaziale dei campi (=che non si spostino per distanze su cui i campi variano apprezzabilmente), ovvero che siano quasi vincolate sul piano $x = 0$. Le cariche risentono della forza di Lorentz

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (15)$$

L'impulso ceduto in uno o piú periodi alla carica é per definizione

$$\vec{I} = \int_0^T \vec{F} dt = \int_0^T \vec{v} \times \vec{B} dt$$

dove il contributo dato dal campo elettrico scompare perché una funzione armonica ha sempre media nulla su un periodo. Poiché per le caratteristiche ricordate a pag.3

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{x} \times \vec{E},$$

l'impulso diventa

$$\vec{I} = \frac{q}{c} \int_0^T \vec{v} \times (\hat{x} \times \vec{E}) dt = \frac{q}{c} \hat{x} \int_0^T \vec{v} \cdot \vec{E} dt = \frac{q}{c} \hat{x} \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \hat{x} L$$

dove L indica il lavoro fatto dal campo ondoso sulla carica. Quindi il sistema di particelle "assorbe" dalla radiazione un'energia pari a L e al tempo stesso un impulso *nella direzione in cui l'onda si propaga* pari in modulo a L/c . Questo vuole dire che un'onda *trasporta energia e quantità di moto*.

ENERGIA TRASPORTATA DALLA RADIAZIONE

Vediamo meglio la questione del trasporto di energia. Per costruire un qualsiasi sistema di cariche si deve fare un certo lavoro per effetto delle interazioni reciproche che si accendono tra i componenti del sistema. Questa energia ha carattere *potenziale*, e può essere calcolata a partire dai campi, nella descrizione in cui il sistema venga sostituito con gli effetti fisici di distorsione dello spazio circostante prodotti. Ad ogni campo e.m. si associa perciò in modo automatico un'energia attraverso l'espressione, valida nel vuoto,

$$U_E = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V u_E dV$$

$$U_B = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_V u_B dV$$

dove V rappresenta l'intero volume in cui sono definiti i campi (può essere tutto lo spazio!) e u_E, u_B sono le *densità di energia*, ovvero l'energia contenuta nel volume unitario (e dipendente dalla posizione dell'elemento di volume considerato). Si ammette che queste formule, dimostrate in un caso meno generale, siano comunque estendibili ai campi di radiazione. La densità di energia di un'onda risulta allora

$$u_{tot} = u_E + u_B = 2u_E = \epsilon_0 E^2$$

L'onda si sposta a velocità c insieme con l'energia ad essa associata, nella direzione data da $\vec{E} \times \vec{B}$. In un tempo dt l'onda percorre un tratto $c dt$ e l'energia che attraversa una superficie trasversa S è quella contenuta nel volume $S c dt$. Si definisce *irradianza o intensità* di un'onda l'energia che passa attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo, ovvero

$$I = \frac{u_{tot} S c dt}{S dt} = c u_{tot}$$

che risulta essere il modulo del *vettore di Poynting*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

il quale descrive il *flusso di energia* (la densità di corrente energetica). Con questo vettore diventa possibile scrivere un'equazione di continuità dell'energia e.m., ovvero un'equazione di conservazione:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

valida in assenza di cariche in moto.

Viste le formule del paragrafo sopra, un'onda trasporta un momento lineare per unità di volume pari a

$$\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

MOMENTO ANGOLARE DELLA RADIAZIONE

Torniamo all'interazione cariche - radiazione. In presenza della forza di Lorentz, ci possiamo chiedere se, per esempio rispetto all'origine arbitraria del nostro sistema di riferimento, vi sia un momento meccanico che produca una variazione di momento angolare (un impulso angolare). Scriviamone la definizione e proviamo a calcolarlo su un periodo dell'onda:

$$\Delta \vec{L} = q \int_0^T \vec{r} \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) dt = q \int_0^T \vec{r} \times \vec{E} dt$$

dove il secondo addendo dell'integrando é nullo in quanto contiene un numero dispari di funzioni armoniche del tempo.

Il risultato dipende a questo punto dallo stato di polarizzazione della radiazione. In un'onda a polarizzazione lineare, si ottiene infatti che \vec{r} , \vec{E} sono paralleli, visto che la carica accelera inizialmente in direzione di \vec{E} e l'integrale fa zero, ovvero non ci sono cambiamenti nel momento angolare delle particelle. Invece per una polarizzazione circolare il risultato é finito e può essere dato in termini del lavoro L della forza.

$$L = \int_{\text{percorso}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^T \vec{F} \cdot \vec{v} dt = q \int_0^T (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q \int_0^T \vec{E} \cdot \vec{v} dt =$$

(integrando per parti)

$$= -q \int_0^T \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{r} dt =$$

(per la (14))

$$= \pm q \omega \hat{x} \cdot \int_0^T \vec{r} \times \vec{E} dt.$$

Quindi

$$\Delta \vec{L} \cdot \hat{x} = \pm \frac{L}{\omega}$$

In generale, quando un sistema di cariche assorbe energia L da un'onda e.m. piana polarizzata circolarmente, esso riceve un momento angolare la cui componente nella direzione di propagazione dell'onda ha modulo pari a L/ω . Detto in altri termini, una generica onda possiede un momento angolare per unità di volume

$$\vec{L} = \frac{1}{c^2} \vec{r} \times \vec{S}.$$