

# FISICA GENERALE 2 per matematici 25.9.95

## Esercizio 1

Due bobine piane coassiali, aventi raggio  $a$  e composte da  $n$  avvolgimenti, sono separate per una distanza pari al loro raggio (*bobine di Helmholtz*). In esse viene fatta scorrere una corrente  $I$  nello stesso verso.

- Calcolare il campo magnetico in tutti i punti  $z$  dell'asse delle bobine e tracciare il grafico  $B(z)$  corrispondente;
- quanto vale il campo magnetico nel punto di mezzo?

In un tubo catodico di un apparecchio televisivo un fascio di elettroni viene accelerato da una differenza di potenziale  $\Delta V$  e fatto passare lungo l'asse  $z$  del sistema formato dalle due bobine. Si supponga che il campo magnetico sia sostanzialmente diverso da zero solo nella zona tra le due spire e che sia pressoché uniforme.

- Qual è l'angolo di deflessione del fascio in uscita dalla seconda spira?

Supponiamo ora che il fascio attraversi la zona di campo perpendicolarmente all'asse  $z$ .

- Qual è l'angolo di deflessione del fascio in questo nuovo caso?

Prendiamo come valori numerici  $\Delta V = 25kV, a = 100mm, I = 2A, \theta_{deflessione} = \frac{\pi}{4}$

- Stimare il numero di avvolgimenti da cui le bobine sono composte.

## Esercizio 2

Una spira quadrata di lato  $l$  ha resistenza  $R$ , induttanza  $L$  e massa  $m$ . La spira giace nel piano orizzontale  $xy$  ed inizialmente procede nella regione  $x < 0$  a velocità  $\vec{v} = v_0\hat{x}$ . Nel semispazio  $x > 0$  è presente un campo di induzione magnetica  $B$  uniforme diretto secondo l'asse  $z$ . All'istante  $t = 0$  la spira inizia a penetrare nella zona dove è presente il campo. Si supponga che valga la relazione  $R^2 < 4B^2l^2L/m$ .

- Calcolare la velocità della spira nell'intervallo  $[0, t^*]$  durante il quale essa si trova parzialmente immersa nel campo;
- calcolare la corrente che scorre nella spira in  $[0, t^*]$ ;
- nel caso particolare  $R = 0$ , si dica qual è il valore minimo  $v_{min}$  della velocità della spira perché essa non ritorni indietro;
- per  $R = 0$  e  $v \geq v_{min}$ , si dica in quale istante  $t^*$  la spira è entrata nel campo e qual è la sua velocità finale.

## Esercizio 3

La nebulosa di Andromeda, distante  $2 \times 10^{22}m$  dalla Terra, irraggia una potenza elettromagnetica di  $8 \times 10^{27}W$  sulla riga spettrale a frequenza  $1420MHz$ .

- Qual è la lunghezza d'onda corrispondente di tale riga? A quale zona dello spettro appartiene la riga?
- Quanti fotoni nell'unità di tempo sono irradiati dalla nebulosa su questa riga?
- Quanti fotoni sono raccolti nell'unità di tempo da un telescopio la cui superficie totale è  $100m^2$ ?

## Soluzione dettagliata e commentata

### Soluzione dell'esercizio 1

#### Introduzione (lunga)

Le bobine di Helmholtz costituiscono un sistema che consente di generare un campo magnetico "sufficientemente" uniforme quando esista una particolare relazione tra il raggio degli avvolgimenti e la distanza tra i centri. Con una coppia di bobine di questo tipo si ha il vantaggio di non dover ricorrere ad un sistema chiuso quale il solenoide. Invertendo il verso di una corrente si ha poi una configurazione anti - Helmholtz, in cui il campo magnetico al centro risulta nullo e vicino al centro il gradiente del campo resta "sufficientemente" uniforme. Dimosteremo in seguito queste peculiarita', perché sono l'ennesimo esercizio di applicazione di analisi matematica alla fisica. Intanto partiamo dal livello zero.

Il campo generato da una bobina formata da  $n$  spire compatte può essere approssimato con

$$\sum_{i=1}^n \vec{B}_i \simeq n\vec{B}_{spira}$$

senza tener conto della distanza che separa le spire l'una dall'altra (come a dire che la distanza tra spire risulta trascurabile rispetto alle distanze in gioco, ma non solo....pensateci!).

Costruiamo il campo magnetico di una spira a partire dalla legge di Biot - Savart, che esprime la perturbazione elementare generata nello spazio da una sorgente infinitesima (un elemento  $d\vec{s}$  di traiettoria percorsa da cariche in moto che producono una corrente  $I$ ):

$$d\vec{B} = k_m \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

con  $k_m$  costante fondamentale del magnetismo (ma qual e' la costante fondamentale dell' *elettromagnetismo*?),  $\vec{r}$  raggio vettore dall'elemento di corrente al punto in cui si calcola l'effetto. Questa espressione ha una struttura per molti versi analoga a quella della perturbazione elementare generata da cariche statiche

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq\hat{r}}{r^2}$$

(trovate analogie e differenze!).

Il calcolo del campo magnetico di una spira può essere effettuato con facilità solo sull'asse geometrico del sistema, per via della *simmetria fisica* associata. Ci aspettiamo infatti che il risultato dell'integrazione vettoriale dia un vettore parallelo all'asse, in quanto il sistema e' *invariante per rotazioni* di un angolo arbitrario attorno all'asse stesso. Quindi, del vettore elementare  $d\vec{B}$  in un punto  $z$  qualunque dell'asse interessa soltanto la componente parallela all'asse

$$dB_z = dB \cos\theta$$

dove  $\theta$  e' l'angolo compreso tra  $d\vec{B}$  ed asse. Possiamo esprimere  $\theta$  in funzione delle distanze in gioco:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

per cui

$$dB_z = k_m \frac{I ds}{a^2 + z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} = k_m \frac{I ds}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

L'integrale è semplice perché l'integrando NON dipende affatto dalla variabile  $ds$ , elemento di linea della spira.

$$B_{tot} = \int_{spira} dB_z = \frac{k_m I 2\pi a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

N.B. naturalmente il verso del campo magnetico dipende dal verso di scorrimento della corrente nella spira, secondo la famigerata regola della mano destra.

La spira percorsa da corrente riveste un'importanza fondamentale da un punto di vista teorico perché costituisce un esempio (al pari degli aghi delle bussole, o del nostro pianeta) di *dipolo magnetico*. Ricordiamo che non esiste (o non è ancora stato individuato sperimentalmente!) il monopolo magnetico e quindi un dipolo magnetico rappresenta la "struttura più semplice" della fenomenologia del magnetismo. Tutti i campi generati da distribuzioni arbitrarie di correnti sono "più complicati" di questo, nel senso che contengono anche, o solo, termini di ordine superiore (*quadrupoli, esapoli, ottupoli,...*). In altre parole, voglio far notare che si possono espandere campi descritti da funzioni matematiche "sufficientemente buone" in una serie di termini che sono sempre gli stessi, ma pesati da coefficienti opportuni che cambiano di volta in volta, in analogia con quanto avviene nelle serie di Taylor (e di Fourier, ne parleremo poi in qualche altra soluzione).

- Calcolare il campo magnetico in tutti i punti  $z$  dell'asse delle bobine e tracciare il grafico  $B(z)$  corrispondente.

Per rispondere alla domanda, basta applicare il principio di sovrapposizione e fissare l'origine comune dell'asse  $z$ . Scegliamo per questa il punto di mezzo delle bobine, in modo che i loro centri si trovino in  $z = \pm a/2$ . Con le correnti concordi la somma algebrica dei campi dà una somma semplice:

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 = \frac{k_m n I 2\pi a^2}{(a^2 + (z - a/2)^2)^{3/2}} + \frac{k_m n I 2\pi a^2}{(a^2 + (z + a/2)^2)^{3/2}} \\ &= k_m n I 2\pi a^2 \left\{ [a^2 + (z - a/2)^2]^{-3/2} + [a^2 + (z + a/2)^2]^{-3/2} \right\} = \\ &= \text{costante} * \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{z}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[ 1 + \left( \frac{z}{a} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} \end{aligned}$$

Riportiamo in fig.1 l'andamento del campo per diversi valori della costante moltiplicativa: cosa significa, sperimentalmente, far diminuire o aumentare tale costante?

Mostriamo ora che l'aver scelto la distanza tra centri pari al raggio ha "appiattito" la funzione attorno allo zero. Intanto seguiamo la strada meno rigorosa e più semplice, riportando in fig.2 l'andamento del campo per diversi valori della distanza  $d$  tra centri. È evidente che, quando i centri sono troppo lontani si ottengono due zone ben distinte in cui il campo è sensibilmente diverso da zero, poi le due campane si sovrappongono in una che è tanto più piccata quanto minore è il valore di  $d$ .

Da un punto di vista rigoroso, il criterio di massima uniformità nei dintorni dell'origine corrisponde a chiedere che in  $z = 0$  si annulli la derivata seconda della funzione

$$\text{costante} * \left[ [a^2 + (z - d/2)^2]^{-3/2} + [a^2 + (z + d/2)^2]^{-3/2} \right].$$

Infatti dallo sviluppo in serie

$$B(z) = B(0) + \left( \frac{dB}{dz} \right) (0)z + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2B}{dz^2} \right) (0)z^2 + \dots$$

poiché la derivata prima è già nulla per la singola campana, per avere  $B(z) \simeq B(0)$  si deve imporre la condizione suddetta. Per esercizio fatevi il calcolo e dimostrate.

Se una delle correnti viene invertita di segno, la somma dei campi è in realtà una differenza: il risultato grafico è mostrato in fig.3, dove risulta evidente l'andamento lineare attorno all'origine. Per informazioni più dettagliate (quali, per esempio?), bisogna calcolarsi lo sviluppo in serie.

- Quanto vale il campo magnetico nel punto di mezzo?

Facilissimo,

$$B(0) = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 n I}{a}$$

- Qual è l'angolo di deflessione del fascio in uscita dalla seconda spira?

Gli elettroni del fascio sono soggetti alla forza di Lorentz  $\vec{F}(z) = q_e \vec{v} \times \vec{B}(z)$ , ma la loro velocità è parallela alla direzione del campo, per cui non vi è deflessione della traiettoria.

- Qual è l'angolo di deflessione del fascio in questo nuovo caso?

Bisogna fare un po' di matematica. Facendo riferimento alla fig.4, dove si vede il piano  $xy$  ortogonale all'asse delle bobine, supponiamo che la traiettoria iniziale punti in direzione del centro  $z = 0$  e che in tutta la sezione circolare il campo sia omogeneo e pari a  $-B(0)\hat{z}$ .

Dimostriamo intanto (a completamento delle dispense di lezione) che in un campo uniforme trasverso la traiettoria è circolare. Dalle equazioni del moto proiettate nel sistema di figura si ricava

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= q_e v_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -q_e v_x B \end{aligned}$$

che sono accoppiate e quindi non risolubili direttamente. Ricorriamo alla notazione complessa, moltiplicando la seconda per  $i = \sqrt{-1}$  e sommando.

$$m \frac{d(v_x + iv_y)}{dt} = q_e(v_y - iv_x)B = -iq_e(v_x + iv_y)B$$

ovvero, definendo  $V = v_x + iv_y$ ,

$$\frac{dV}{dt} = -i \frac{q_e B}{m} V$$

che ha l'ovvia soluzione

$$V(t) = V(0) \exp(-i\omega_{ciclone} t)$$

dove  $V(0) = v_x(0) + iv_y(0) = -v_0$ . Perciò

$$v_x(t) = \text{Re}[V(t)] = -v_0 \cos(\omega_{ciclone} t)$$

$$v_y(t) = \text{Im}[V(t)] = +v_0 \sin(\omega_{ciclone} t)$$

e, integrando,

$$x(t) - x_0 = -R \sin(\omega_{ciclone} t)$$

$$y(t) - y_0 = -R \cos(\omega_{ciclone} t)$$

che sono le equazioni di una circonferenza di raggio  $R$  percorsa in senso orario.

- Poiché il punto di ingresso  $A$  nella regione di campo appartiene alla circonferenza percorsa dagli elettroni, il centro  $P$  della circonferenza si deve trovare sulla retta  $x = a$ , ovvero deve essere  $x_0 = a$ , mentre di conseguenza  $y_0 = R$ . Per definire l'angolo di deflessione, dobbiamo individuare il punto di uscita dalla zona di campo, che resta anche un punto della traiettoria circolare; si mettono allora a sistema le equazioni delle circonferenze

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= a^2 \\(x - a)^2 + (y - R)^2 &= R^2\end{aligned}$$

che danno come soluzioni i punti  $A = (a, 0)$  (e meno male!) e

$$C = \left( a \frac{a^2 - R^2}{a^2 + R^2}, \frac{2a^2 R}{a^2 + R^2} \right)$$

(verificate sempre tutto, non fidatevi mai di nessun libro o testo!!!! A proposito, cosa ottiene questa formula per  $a \leq R$  o viceversa? insegnate a discutere le soluzioni che escono dai calcoli...).

La deflessione e' finalmente data dall'angolo di inclinazione supplementare a quello della retta tangente alla traiettoria degli elettroni nel punto di uscita, visto che la traiettoria iniziale coincide con l'asse  $x$ , verso negativo. Per trovarne l'equazione, l'unico modo che vedo e' quello di trovare la retta che contiene  $C$  e  $P$  e poi cercare la retta ortogonale che passa per  $C$ . E' tutta geometria elementare, non avrete difficolta' a dimostrare che si tratta della retta

$$y = \frac{2Ra}{a^2 - R^2}x$$

(e' interessante notare che gli elettroni escono SEMPRE radialmente, a prescindere dalle condizioni fisiche quali i valori di  $B, v$  ecc.: come mai?). Percio'

$$tg(\pi - \theta_{deflessione}) = \frac{2Ra}{a^2 - R^2}$$

con

$$R = \frac{mv}{q_e B} = \frac{m}{q_e B} \sqrt{\frac{2q_e \Delta V}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m \Delta V}{q_e}}$$

- Stimare il numero di avvolgimenti da cui le bobine sono composte.

Si deve semplicemente invertire la formula

$$\frac{2Ra}{a^2 - R^2} = tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

che da' luogo ad un'equazione di secondo grado, la cui unica radice sensata e'

$$R = a(1 + \sqrt{2}) = 24cm$$

da cui

$$B = \sqrt{\frac{2m \Delta V}{q_e}} \frac{1}{R} = 2.2 \times 10^{-3} T$$

e infine

$$n = \frac{5\sqrt{5}}{8} \frac{aB}{\mu_0 I} \simeq 120$$

che e' un numero grosso per poter sperare di compattarle tutte in uno spazio ristretto!!! (tutta colpa di chi da' questi stupidi esercizi e non fa i conti prima....voi non seguite i cattivi esempi.)

## Soluzione dell'esercizio 2

### Introduzione

Questo e' un "classico" esercizio sull'induzione. La legge di Faraday afferma che, scelta un'arbitraria linea chiusa  $\gamma$  nello spazio, la variazione di flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie  $S$  aperta che abbia come bordo tale linea, genera attraverso la linea stessa un campo elettrico non conservativo, ovvero una differenza di potenziale indotta.

$$\Delta V_{indotta} = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

dove  $\hat{n}$  e' la normale a  $S$ , il cui verso puo' essere scelto a piacimento (purché si sia conseguenti in tutti i calcoli successivi!).

Di solito si sceglie come curva arbitraria un circuito reale, come in questo caso specifico, ma bisogna ricordarsi che, come per il teorema di Gauss, la validita' della legge e' infinitamente piu'estesa e non si limita alle sue "volgari" applicazioni.

La legge di Lenz, il segno  $-$  a secondo membro, e' semplicemente un'applicazione del principio di conservazione dell'energia: se, a seguito della comparsa del campo elettrico indotto, si genera una corrente indotta, il verso di questa e' tale da produrre un ulteriore campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso che l'ha causato, altrimenti si sarebbero risolti i problemi di dipendenza dal petrolio.

- Calcolare la velocita' della spira nell'intervallo  $[0, t^*]$  durante il quale essa si trova parzialmente immersa nel campo;
- calcolare la corrente che scorre nella spira in  $[0, t^*]$ .

La risposta a queste due domande viene dalla soluzione di un sistema di equazioni accoppiate. Appliciamo la legge di Faraday alla spira quadrata: finché il primo lato della spira non supera il confine della regione di campo, non succede nulla, poi il flusso di  $B$  aumenta in modulo sino a quando eventualmente il secondo lato non riesce a penetrare in  $x > 0$ . Calcoliamo il flusso del campo magnetico

$$\Phi_B = \int_{spira} \vec{B} \cdot \hat{n} dS =$$

( $B$  e' perpendicolare alla spira, quindi parallelo alla normale  $\hat{n}$ )

$$= \int_{spira} B dS =$$

( $B$  e' uniforme nella regione  $x > 0$ )

$$= B \int_0^x l dx' = Blx$$

Percio'

$$\Delta V_{indotta}(t) = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv(t).$$

D'altronde la spira e' un circuito chiuso in cui scorre corrente, alimentata dal "generatore indotto": la corrente, per la legge di Lenz, gira in verso orario. Alla spira sono associate una resistenza  $R$  e un coefficiente di autoinduzione  $L$ , che provocano cadute di tensione. La legge delle maglie di Kirchhof, o meglio la legge che regola campi e potenziali, richiede

che (vedere figura), partendo da un punto qualsiasi del circuito e ritornandovi, la somma delle variazioni di potenziale (inclusa la  $\Delta V!$ ) dia precisamente zero.

$$\Delta V_{indotta}(t) - RI(t) - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Questa equazione da sola non porta alla soluzione del problema, in quanto contiene le due variabili incognite dipendenti dal tempo  $v(t), I(t)$ . A soccorrerci c'è l'equazione del moto della spira. La velocità della spira cambia infatti nel tempo per effetto della forza magnetica sul circuito (altro non è che la forza di Lorentz), o, per meglio dire, sul primo lato del circuito, visto che sui lati paralleli all'asse  $x$  le forze si compensano e che il secondo lato si trova in una regione di campo nullo. L'espressione per la forza cui è sottoposto un tratto  $dl$  di filo percorso da una corrente  $I$  il cui verso definisce il vettore  $d\vec{l}$  è infatti  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ . Poiché in questo caso il campo è uniforme e punto per punto perpendicolare al lato della spira, si ha semplicemente  $\vec{F} = -IlB\hat{x}$ . In altri termini (scalari)

$$m \frac{dv}{dt} = BlI(t).$$

A questo punto siamo a cavallo, ma fatemi prima aprire una nuova parentesi. Per evitare che la fisica sia vista e considerata come una lunga sequenza di formule da mandare a memoria, chi insegna deve saper distinguere ciò che è davvero *fondamentale* da ciò che non lo è. A ben guardare, le espressioni chiave non sono poi così tante: a parte le definizioni cinematiche (un paio), le leggi della meccanica sono solo due (prima e seconda cardinale), quelle dell'elettromagnetismo cinque (eq. di Maxwell + forza di Lorentz), per la gravitazione si può lavorare a basso livello con una sola formula: tutto il resto è derivabile con facilità (esagero un pochino, ma non troppo) o è la solita pappa scodellata in forma diversa. Ne abbiamo appena vista una serie di esempi. La legge di Lenz, le leggi di Kirchhoff, l'espressione della forza magnetica su un filo percorso da corrente, senza offesa per chi ci ha lavorato su duramente nel tempo passato, sono tutte riconducibili a principi di rango più elevato. Il messaggio è: sarebbe bene selezionare con cura gli argomenti, in modo da discutere le questioni centrali (leggi di conservazione, su tutte), oltre che un certo numero di esempi applicativi che mostrino la potenza descrittiva dei modelli fisici, pur con tutti i limiti dovuti alla necessità semplificativa.

- Torniamo a bomba. Sostituiamo

$$I(t) = \frac{m}{Bl} \frac{dv}{dt}$$

nell'equazione del circuito per ottenere

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mL} v = 0$$

Discutiamo approfonditamente questa equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. Intanto è chiaro che il primo e il terzo termine da soli darebbero vita ad una soluzione oscillante armonica pura (di pulsazione  $\omega_0 = Bl/\sqrt{mL}$ ), così come il secondo e il terzo ad una di tipo esponenziale negativo (di costante tempo caratteristica  $\tau = L/R = 1/\gamma$ ). L'equazione risultante conterrà una qualche miscela delle due soluzioni! Seguiamo la strategia di risoluzione canonica, trovando le radici del polinomio caratteristico

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}$$

da cui si dovrebbe capire il senso della restrizione imposta dal testo. Infatti se  $\gamma < 2\omega$  le radici diventano complesse e le soluzioni oscillanti, altrimenti si otterrebbe la somma di esponenziali reali, uno dei quali divergerebbe su tempi lunghi, essendo

$$v(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t/2} \left[ A_1 \exp\left(+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right) \right]$$

Questa è LA soluzione generale, che *può* essere del tipo oscillante smorzato, ma non lo è necessariamente, come alcuni libri di testo sembrano far intendere. Si deve fare molta attenzione ai valori dei coefficienti.

Nel nostro caso

$$v(t) = (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) e^{-\gamma t/2} = (A_1 + A_2) \cos(\omega t) e^{-\gamma t/2} + i(A_1 - A_2) \sin(\omega t) e^{-\gamma t/2}$$

con  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ ;  $v(t)$  risulterebbe una funzione complessa, mentre le soluzioni fisiche *possono essere solo reali*. Si deve prendere quindi la parte reale dell'espressione precedente, sottoposta alla condizione al contorno

$$v(0) = A_1 + A_2 = v_0$$

da cui

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) e^{-\gamma t/2}$$

e

$$I(t) = -\frac{mv_0}{Bl} \left[ \omega \sin(\omega t) + \frac{\gamma}{2} \cos(\omega t) \right] e^{-\gamma t/2}.$$

- Nel caso particolare  $R = 0$ , si dica qual è il valore minimo  $v_{min}$  della velocità della spira perché essa non ritorni indietro;
- per  $R = 0$  e  $v \geq v_{min}$ , si dica in quale istante  $t^*$  la spira è entrata nel campo e qual è la sua velocità finale.

Per resistenza nulla, scompare dall'equazione il termine che introduce lo smorzamento, ovvero si cancella l'esponenziale decrescente e resta l'oscillazione alla pulsazione "propria"  $\omega_0$

$$v(t) = v_0 \cos(\omega_0 t).$$

Tale comportamento armonico della velocità dura per l'intervallo di tempo in cui la spira supera il bordo della regione di campo, poi il moto diventa rettilineo uniforme alla velocità  $v(t^*)$ . Perché la spira non torni indietro si deve verificare che  $v(t^*) \geq 0$ , ovvero

$$t^* \leq \frac{\pi}{2\omega_0}.$$

D'altro canto l'istante  $t^*$  è identificato dalla condizione  $x(t^*) = l$  per i punti del primo lato della spira che entra nel semispazio occupato da  $B$ . Troviamo  $x(t)$  per integrazione diretta

$$x(t) = \int v(t) dt + x_0 = \int v(t) dt = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

per cui

$$t^* = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{\omega_0 l}{v_0}\right)$$

ed infine

$$v_{min} = \frac{Bl^2}{\sqrt{mL}};$$

altrimenti, per  $v_0 > v_{min}$ ,

$$v(t^*) = v_0 \cos \left[ \arcsin \left( \frac{\omega_0 l}{v_0} \right) \right].$$

### Soluzione dell'esercizio 3

Questo e' un esercizio molto semplice, in cui basta applicare alcune conoscenze elementari ed eseguire con scrupolo i relativi calcoli. Per la teoria rimando alle dispense di lezione.

- Qual e' la lunghezza d'onda corrispondente di tale riga? A quale zona dello spettro appartiene la riga?

Per la radiazione e.m. lunghezza d'onda e frequenza sono legate dalla velocita' della luce

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 21.1 \text{ cm}$$

ed e' di poco spostata (verso le basse frequenze) rispetto alla banda su cui trasmettono i vostri telefoni cellulari.

- Quanti fotoni nell'unita' di tempo sono irradiati dalla nebulosa su questa riga?

Il concetto di fotone appartiene alla fisica moderna e non puo' mancare la costante di Planck a far da tramite tra espressioni (quasi)classiche e quantistiche. La potenza emessa da una sorgente e' l'energia irradiata nell'unita' di tempo, quindi e' data dal numero di fotoni emessi per unita' di tempo per l'energia trasportata dal singolo fotone

$$P = \frac{dn}{dt} h\nu$$

invertendo la quale si ottiene

$$\frac{dn}{dt} = 8 \times 10^{51} \text{ s}^{-1}.$$

- Quanti fotoni sono raccolti nell'unita' di tempo da un telescopio la cui superficie totale e'  $100 \text{ m}^2$ ?

Il numero di fotoni intercettati rispetto a quelli emessi sta nella stessa proporzione che esiste tra la superficie del telescopio e la superficie totale della sfera di raggio pari alla distanza terra - sorgente

$$\frac{dn}{dt}_{raccolti} = \frac{dn}{dt} \frac{S}{4\pi d^2} = 1.67 \times 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

# FISICA 1 INGEGNERIA 7.7.93 (da Matematica Pisa)

## Esercizio 1

Un ciclista percorre con velocità costante  $v_0$  una strada in salita che forma un angolo  $\alpha$  con l'orizzontale. La massa totale del ciclista e della bicicletta è  $M$ , mentre le ruote hanno raggio  $R$  e massa  $m$  (tutta concentrata sulla loro circonferenza). La bicicletta non presenta attriti interni ed è costituita da due ruote collegate al telaio tramite gli assi e, per quanto riguarda la ruota posteriore, anche tramite la catena. Si suppone che le ruote non slittino mai nel percorso considerato.

1. Qual è il lavoro totale fatto nell'unità di tempo da tutte le forze (interne ed esterne)?
2. Determinare la potenza sviluppata dai muscoli del ciclista. Dopo aver ricavato l'espressione letterale, si effettui il calcolo esplicito per  $\alpha = 6^\circ$ ,  $M = 70kg$ ,  $v_0 = 15km/h$ ;
3. determinare il lavoro fatto dal ciclista per portarsi, partendo da fermo, alla velocità  $v_0$  in un tratto di salita lungo  $l$ . Si effettui il calcolo esplicito per  $l = 20m$ ,  $m = 0.5kg$ ;
4. determinare, in modulo e verso, la risultante delle forze di attrito statico che la strada esercita sulle due ruote;
5. Se  $r$  è il raggio dell'ingranaggio coassiale con la ruota posteriore, determinare la tensione della catena della bicicletta nel punto indicato in figura (nella parte inferiore la catena non è in tensione), e la si calcoli per  $R = 36cm$ ,  $r = 4cm$ .

Ad un certo punto il ciclista, stanco di salire, gira la bicicletta e percorre la discesa senza frenare.

6. Se l'aria esercita sul corpo del ciclista una forza opposta al moto  $F = -\gamma v^2$ , determinare la velocità limite  $v_f$ ;
7. se  $v_f = 60km/h$ , calcolare  $\gamma$ .

## Esercizio 2

Il ciclista del problema precedente ( $M = 70kg$ ) sale un dislivello  $h = 1500m$ , compiendo quindi un certo lavoro. Per mantenere invariata la sua energia interna (quindi sarà  $U_f = U_i$ ), il ciclista mangia una certa quantità di zucchero che, tramite la digestione, gli fornisce calore ad un'opportuna temperatura  $T_2$ . Inoltre egli beve  $2l$  di acqua alla temperatura di  $20^\circ C$  che elimina integralmente per evaporazione attraverso l'epidermide, alla temperatura di  $37^\circ C$  (che è anche la temperatura dell'ambiente nelle immediate vicinanze del suo corpo). Il calore di evaporazione dell'acqua è in queste condizioni  $550cal/g$ .

1. Sapendo che  $1g$  di zucchero fornisce all'organismo  $4 \times 10^3 cal$ , quanto zucchero ha mangiato il ciclista?
2. Considerando il ciclista una macchina termica ciclica (lo stato "termodinamico" del ciclista può essere considerato lo stesso all'inizio della salita e alla fine del dislivello), qual è il rendimento di tale macchina?
3. Calcolare un limite inferiore per la temperatura  $T_2$ .
4. La variazione di entropia del ciclista è positiva, negativa o nulla? E quella dell'ambiente circostante? Giustificare le risposte.

## Soluzione dell'esercizio 1 - Meccanica

### Introduzione

Non bisogna mai lasciarsi ingannare dalle apparenze: tutti gli esercizi sono risolvibili con un'oculata applicazione di pochi principi fondamentali, che adesso iniziamo a riassumere, partendo (quasi) da zero. Vedremo che la tecnica di risoluzione si basa sulla capacita', di volta in volta, di ridefinire il *sistema fisico* che si prende in considerazione e di conseguenza rietichettare cio' che e' *esterno* o *interno*.

I fondamenti della meccanica classica sono gli assiomi di Newton sulle leggi del moto, secondo i quali la somma (vettoriale!) delle forze *esterne* agenti su un sistema fisico (macroscopico o meno, semplice come un punto materiale o complesso come un corpo rigido) producono la variazione nel tempo della *quantita' di moto* del *centro di massa (CM)* del sistema stesso, definita come

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j$$

per sistemi discreti di particelle puntiformi, oppure:

$$= \int_M \vec{v} dm$$

per sistemi continui. La prima equazione cardinale della dinamica, che contiene le leggi sul moto di Galileo e Newton, ha quindi la seguente formulazione:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}$$

dove la somma va calcolata traslando i vettori  $\vec{F}_i$ , ovunque essi siano applicati, sul *CM*.

Questa espressione contiene

- la *conservazione* della quantita' di moto, nel caso in cui la risultante delle forze esterne sia nulla (che e' cosa ben diversa dal dire "in assenza di forze esterne" ...),
- la statica di un punto materiale (come sopra con in piu'  $\vec{v}_0 = 0$ ).

Nel seguito, faremo per semplicita' l'ipotesi di un corpo puntiforme, tranne che per specificazioni quando i risultati parziali non sono generalizzabili.

Va notato che, in generale, l'accelerazione NON e' parallela alla forza risultante: infatti, se la massa del sistema dipende dal tempo

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \frac{dM}{dt} \vec{v} + M\vec{a}$$

la direzione di  $\vec{a}$  dipende anche dalla direzione della velocita' istantanea.

Comunque in moltissimi casi di interesse, la legge si semplifica nella celeberrima forma

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = M\vec{a} = M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

che e' quella che serve a noi per l'esercizio.

Per dedurre dalla prima cardinale ulteriori informazioni, moltiplichiamo i due membri scalarmente per la velocita'

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} M \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} M v^2 \right) = \frac{dE_{cin}}{dt}$$

da cui si ricava il *teorema delle forze vive*

$$dE_{cin} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v} dt = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N dL_i = dL$$

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{(B)} - E_{cin}^{(A)} = L_{tot}^{(A \rightarrow B)} :$$

il lavoro fatto dalle forze in gioco per spostare il corpo dal punto  $A$  dello spazio al punto  $B$  produce una pari variazione di energia cinetica.

N.B. Per un corpo rigido, o per un sistema formato da un insieme discreto e deformabile di particelle puntiformi, non bisogna trascurare le forze interne, che non danno contributo all'accelerazione totale, ma possono costituire il "motore" (nel senso di cio' che fornisce energia meccanica). Infatti per ogni particella o componente  $i$ -sima vale

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{k=1}^h \vec{F}_k^{int} + \sum_{l=1}^t \vec{F}_l^{ext}$$

ed e' questa equazione che va moltiplicata scalarmente per la velocita' *del punto stesso*, PRIMA di sommare su tutti i punti del sistema e trovare la prima cardinale. Ricordiamoci che nella definizione di lavoro lo spostamento infinitesimo e' SEMPRE quello del punto di applicazione della forza, non quello del centro di massa (ovviamente, tutto coincide per un punto materiale!). La risposta ai primi due quesiti chiarira' meglio le conseguenze di queste affermazioni.

Se le forze sono conservative, e' possibile esprimerle nella forma

$$\vec{F}_i = -\nabla U_i$$

attraverso l'introduzione dell'energia potenziale, funzione delle sole coordinate spaziali, ed il lavoro fatto diventa

$$L_i^{(A \rightarrow B)} = -\Delta U = U_A - U_B$$

cosi' che il teorema si specializza nella legge di conservazione dell'energia totale del corpo

$$\frac{d}{dt} (E_{cin} + U) = 0.$$

N.B. Vi sono casi in cui e' possibile definire comunque una funzione  $U$  dipendente in modo esplicito dal tempo, nel qual caso si torna al teorema piu' generale

$$\frac{d}{dt} (E_{cin} + U) = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Ma veniamo all'esercizio.

- Qual e' il lavoro totale fatto nell'unita' di tempo da tutte le forze (interne ed esterne)?  
Consideriamo il sistema bici+ciclista. La velocita' di tale sistema (e quindi l'energia cinetica) resta costante, a detta del testo; inoltre non vi sono forze dissipative interne, quindi per il teorema delle forze vive il lavoro totale e' nullo. Punto e basta.
- Determinare la potenza sviluppata dai muscoli del ciclista e si effettui il calcolo esplicito per  $\alpha = 6^\circ$ ,  $M = 70kg$ ,  $v_0 = 15km/h$

Il lavoro totale e' dato da piu' fattori. Siccome la strada e' in salita, sicuramente la forza peso compie lavoro; d'altronde, come fanno quelli che vanno in bici e tentano le montagne, si "brucia" un sacco di energia (le bici da sole non vanno...). Ci sarebbe anche

la forza di attrito tra strada e ruote, ma in queste condizioni essa non compie lavoro, perché il punto di contatto tra suolo e ruota, dove è applicata la forza, è fermo rispetto a terra; in definitiva, non essendovi attriti interni, e poiché la velocità resta costante, la potenza dissipata dalla componente della forza peso totale lungo la strada deve uguagliare in modulo la "spinta" del ciclista:

$$P = Mgv_0 \sin \alpha = 300W$$

Ricordiamo il perché il punto di contatto terra - copertone è fermo: nel moto di puro rotolamento, l'asse istantaneo di rotazione (cioè l'asse rispetto a cui la ruota esegue una rotazione *pura*) passa per tale punto e quindi tale punto deve risultare in quiete. In altri termini, la velocità totale del punto di contatto  $A$  è la composizione della velocità di traslazione della ruota (pari a quella del  $CM$  della bici) e della velocità con cui si sposta il punto periferico per effetto della rotazione a velocità angolare  $\omega$ :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

dove  $\vec{\omega}$  è diretto secondo l'asse di rotazione ed entra nella pagina (sempre la regola della mano destra!),  $\vec{R}$  va dal centro della ruota ad  $A$ . Per questo motivo nel rotolamento puro  $v_{CM} = \omega R$ .

- Determinare il lavoro fatto dal ciclista per portarsi, partendo da fermo, alla velocità  $v_0$  in un tratto di salita lungo  $l$ . Si effettui il calcolo esplicito per  $l = 20m, m = 0.5kg$ .

Dopo aver percorso il tratto  $l$  in salita partendo da fermo, il ciclista ha guadagnato in energia potenziale gravitazionale e in energia cinetica, che è suddivisa in una parte dovuta alla traslazione del centro di massa a velocità  $v_0$  ed in una parte dovuta alla rotazione delle due ruote a velocità angolare  $v_0/R$  (moto di puro rotolamento). Ancora il teorema delle forze vive ci dà:

$$L = 2 \frac{1}{2} M v_0^2 + 2mR^2 \omega_0^2 + Mgl \sin \alpha = 2.1kJ$$

L'energia cinetica di un corpo rigido è la somma delle energie cinetiche delle particelle da cui il corpo è formato. Per il singolo elemento infinitesimo possiamo scrivere

$$dE_{cin} = \frac{dmv^2}{2} = \frac{dm(\vec{v}_{CM} + \vec{u})^2}{2} = \frac{dmv_{CM}^2}{2} + dm\vec{v}_{CM} \cdot \vec{u} + \frac{dmu^2}{2}$$

dove  $\vec{u}$  è la velocità dell'elemento in un sistema solidale al  $CM$ . Quando si va a sommare su tutti gli elementi, il secondo addendo scompare perché

$$\vec{v}_{CM} \cdot \int_M \vec{u} dm = \vec{v}_{CM} \cdot \frac{d}{dt} \int_M \vec{r}_{CM \rightarrow dm} dm = 0$$

per via della definizione di  $CM$ . Restano dunque due termini

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \int dm u^2$$

di cui il primo è l'energia di traslazione del corpo, l'altro esprime l'energia con cui le particelle si muovono in rotazione attorno al  $CM$ . SOLO QUANDO L'ASSE DI ROTAZIONE È FISSO, questo addendo diventa semplice prodotto tra scalari

$$\frac{1}{2} \int dm u^2 = \frac{1}{2} \int_M dm (\omega r_{CM \rightarrow dm})^2 = \frac{\omega^2}{2} \int_M dm r_{CM \rightarrow dm}^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

con un'ovvia definizione del *momento d'inerzia*  $I_{CM}$ , grandezza che descrive l'inerzia di un corpo rispetto alle rotazioni, così come la massa descrive l'inerzia rispetto alle traslazioni.

- Determinare, in modulo e verso, la risultante delle forze di attrito statico che la strada esercita sulle due ruote.

La velocità del ciclista è costante, quindi l'accelerazione del  $CM$  è nulla, quindi la risultante delle forze esterne è nulla, quindi

$$F_{tot}^{(attr)} = -Mg \sin \alpha$$

cioè la forza di attrito è diretta verso l'alto. Ricordatevi sempre che, anche se una forza non compie lavoro, non si può far finta che non ci sia e non produca nessun risultato (vi viene in mente un altro esempio?)!

Tale forza si esercita solo sulla ruota posteriore: per capirlo, studiamo separatamente dal resto i momenti agenti sulla ruota anteriore rispetto al suo centro. La velocità angolare della ruota è costante, quindi il momento totale delle forze esterne fa zero; ma non vi sono altre forze esterne agenti, oltre all'eventuale attrito, con braccio non nullo: forza peso e trazione del telaio nel punto di attacco sono applicate proprio nel polo scelto.

Mostriamo ora che la seconda equazione cardinale può essere dedotta dalla prima, con la necessità di introdurre nuove grandezze che completino la descrizione della dinamica di un corpo qualsiasi. Si parte dall'equazione del moto per una particella

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{k=1}^h \vec{F}_k^{int} + \sum_{l=1}^t \vec{F}_l^{ext}$$

che va moltiplicata vettorialmente per la posizione della particella rispetto all'origine del sistema di coordinate fisso

$$m_i \vec{R}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i) - \frac{d\vec{R}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} (\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{R}_i \times \sum_{k=1}^h \vec{F}_k^{int} + \vec{R}_i \times \sum_{l=1}^t \vec{F}_l^{ext}.$$

Adesso dobbiamo sommare sulle particelle che compongono il sistema

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{k=1}^h \vec{R}_i \times \vec{F}_k^{int} + \sum_{l=1}^t \vec{R}_i \times \vec{F}_l^{ext}$$

dove si è definito il *momento angolare* totale  $\vec{L}_{tot}$  del sistema rispetto all'origine. Al secondo membro il primo addendo è nullo per il terzo principio (le forze interne agiscono a coppie in direzioni parallele e versi opposti) e il secondo può essere usato per la definizione del *momento delle forze* agenti sul corpo. In definitiva

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^{ext} = \vec{\tau}_{tot}^{ext}.$$

Un risultato importante si ottiene spostandosi nel sistema di riferimento solidale con il  $CM$ : l'equazione resta formalmente invariata, ma il momento angolare totale e il momento delle forze vanno calcolati rispetto al centro di massa stesso. Questo significa che È POSSIBILE DISACCOPIARE TRASLAZIONI E ROTAZIONI!!!

- Determinare la tensione della catena della bicicletta e la si calcoli per  $R = 36\text{cm}$ ,  $r = 4\text{cm}$ . Questa volta il nostro sistema diventa la ruota posteriore. Il momento totale delle forze esterne applicate alla ruota deve annullarsi, visto che anche la ruota posteriore procede a

velocita' angolare costante. Percio', scelto il solito polo, catena e attrito debbono produrre momenti uguali in versi opposti:

$$Tr = F_{attr}R$$

$$T = Mgsin\alpha \frac{R}{r} = 650N$$

- Se l'aria esercita sul corpo del ciclista una forza opposta al moto  $F = -\gamma v^2$ , determinare la velocita' limite  $v_f$ .

Discutiamo per chiarezza (non ce ne sarebbe bisogno) l'equazione del moto per il ciclista in discesa. Sul sistema (unidimensionale) agiscono, oltre alla componente della forza peso parallela al piano e alla forza di attrito dell'aria, le forze di attrito applicate nei punti di contatto tra ruote e suolo. Questa volta le forze sono dirette in opposizione al moto (debbono aumentare la velocita' angolare delle ruote nel verso giusto) ed e' presente anche quella sulla ruota anteriore (altrimenti non ci sarebbe accelerazione angolare):

$$Mgsin\alpha - \gamma v^2 - F_{attr}^{(post)} - F_{attr}^{(ant)} = M \frac{dv}{dt}$$

con

$$F_{attr}^{(post)} = F_{attr}^{(ant)} = \frac{1}{R} I_{ruota} \frac{d\omega}{dt} = m \frac{dv}{dt},$$

per cui

$$Mgsin\alpha - \gamma v^2 = (M + 2m) \frac{dv}{dt}$$

La bici aumenta la sua velocita', e man mano che cio' accade aumenta anche la resistenza dell'aria, finché l'accelerazione non si annulla. Da quel momento la velocita' resta costante:

$$Mgsin\alpha - \gamma v_f^2 = 0$$

da cui  $v_f = \sqrt{Mgsin\alpha/\gamma}$ . Va notato che, raggiunta la velocita' limite, la strada non esercita piu' alcun attrito frenante sulle ruote.

Ma vediamo anche la soluzione analitica dell'equazione differenziale, che si ottiene per separazione delle variabili

$$\frac{dv}{Mgsin\alpha - \gamma v^2} = \frac{dt}{M + 2m}$$

$$\int_{v(0)}^v \frac{dv'}{\frac{Mgsin\alpha}{\gamma} - v'^2} = \int_{v(0)}^v \frac{dv}{v_f^2 - v^2} = \int_0^t \frac{\gamma dt'}{M + 2m}$$

$$\frac{1}{v_f} \operatorname{arctgh} \left( \frac{v}{v_f} \right) = \frac{\gamma t}{M + 2m}$$

$$v(t) = v_f \operatorname{tgh} \left( \frac{v_f \gamma t}{M + 2m} \right) = v_f \operatorname{tgh}(bt)$$

Talvolta la forza di attrito dell'aria viene schematizzata con un termine direttamente proporzionale al modulo della velocita' ( $-\Gamma v$ ): se quantitativamente la soluzione e' diversa,

$$v(t) = \frac{Mgsin\alpha}{\Gamma} (1 - e^{-b_1 t}),$$

(ricavatevela!) da un punto di vista qualitativo non si hanno modifiche sostanziali, come mostrato in figura.

- se  $v_f = 60 \text{ km/h}$ , calcolare  $\gamma$ .

$$\gamma = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

## Soluzione dell'esercizio 2 - Termodinamica

### Introduzione

Il primo principio della termodinamica e' una riformulazione ed una generalizzazione del principio di conservazione dell'energia, che viene cosi' ad includere anche i sistemi *termodinamici*. Tali insiemi di particelle contengono un elevatissimo numero di componenti (il famigerato numero di Avogadro ne costituisce un qualche plausibile ordine di grandezza), per cui si deve rinunciare alla determinazione dettagliata del moto di ciascun punto materiale al loro interno e se ne studiano invece *proprietà medie*.

Per un sistema termodinamico l'energia cinetica totale dei componenti e l'energia potenziale posseduta a seguito di interazioni conservative fra parti del sistema stesso sono riassunte da una funzione che prende il nome di *energia interna*,  $E_{int}$ . L'energia interna e' una *funzione di stato*, cioe' e' univocamente assegnata in base allo stato termodinamico del sistema.

Per definire compiutamente questo, le poche variabili necessarie possono essere di tipo geometrico (il volume  $V$ ), di tipo chimico (le concentrazioni dei diversi composti presenti in una miscela), di tipo piu' prettamente fisico: la pressione  $p$  e la temperatura  $T$ , che risultano, dalla teoria cinetica, entrambi proporzionali all'energia media associata al moto caotico delle particelle ed alle loro interazioni. Tra gli stati termodinamici sono particolarmente utili (e difficili da realizzare!) gli stati di *equilibrio*, per i quali le variabili termodinamiche non evolvono (ma gli stati microscopici si') e sono definite univocamente per l'intero sistema. a collegare gli stati provvedono le *trasformazioni*, che si distinguono essenzialmente in *reversibili* e *irreversibili*, a seconda che la successione degli stati sia di equilibrio o meno.

Nel primo principio l'attenzione e' tutta concentrata sul sistema termodinamico: una variazione di energia interna puo' essere prodotta dal lavoro fatto dall'esterno sul sistema, ma in una buona percentuale di testi il lavoro  $L$  contenuto nell'equazione descrive invece quello fatto dal sistema sull'esterno. Tuttavia 1) Il lavoro fatto dal ciclista ammonta a

$$L = Mgh = 1.03 \times 10^6 J$$

Poiché e' esplicitamente detto che  $\Delta U = 0$ ,

$$Q = Q_{ass} - Q_{ced} = L$$

$$Q_{ced} = m_{acqua}(c\Delta T + \lambda) = 1.13 \times 10^6 J$$

$$Q_{ass} = 1.38 \times 10^6 cal$$

$$m_{zucchero} = 345g$$

2) Dalla definizione

$$\eta = L/Q_{ass} = 18\%$$

3) Assumendo che la macchina termica lavori tra la temperatura incognita e 37 gradi (trascuriamo il fatto che l'acqua viene ingerita a 20 gradi), si ha  $\eta < 1 - T_1/T_2$ ;  $T_2 > 378K$

4) Poiché il ciclista viene considerato una macchina termica ciclica, la sua entropia non cambia. Quella dell'ambiente esterno invece aumenta (e' la sorgente fredda della macchina termica e le trasformazioni fatte sono irreversibili).