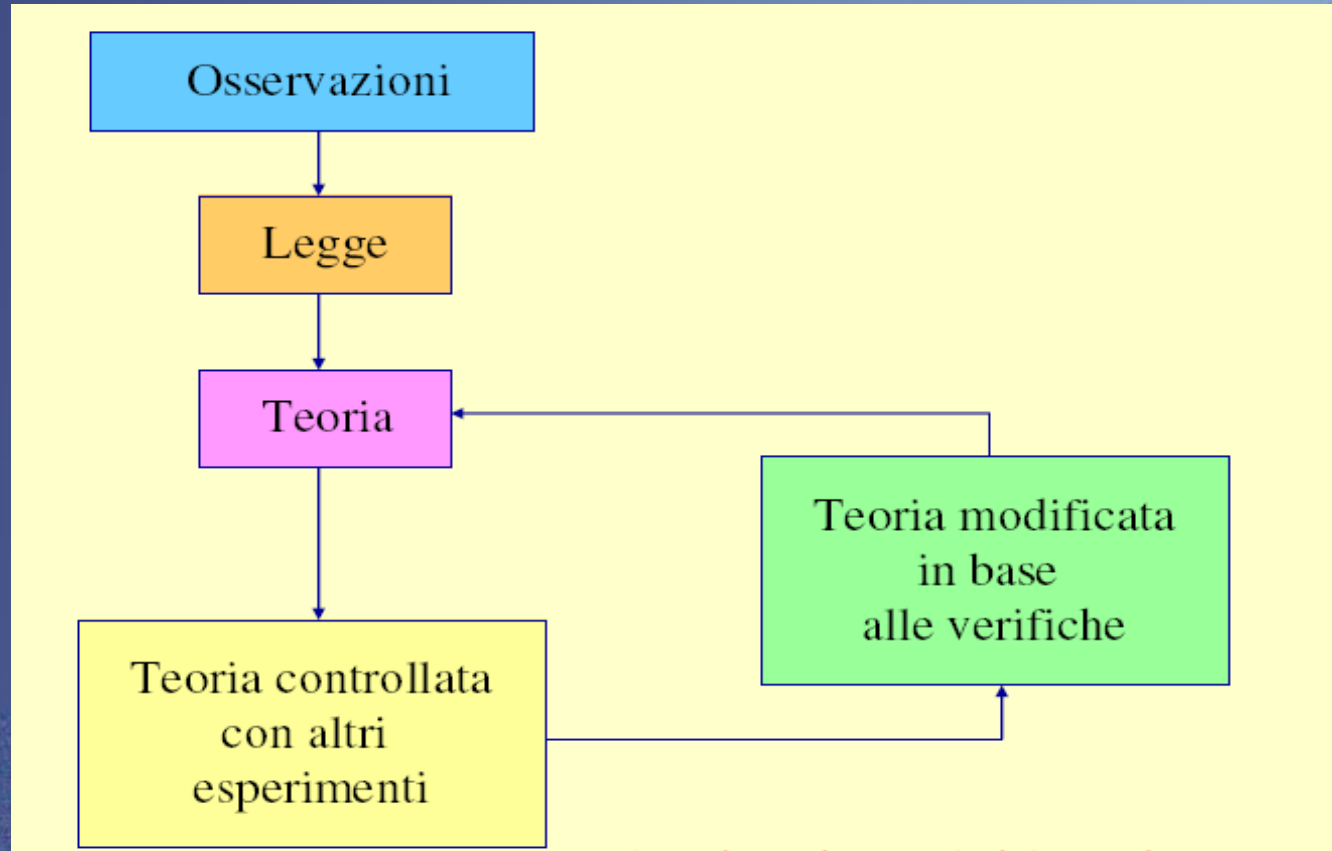


INTRODUZIONE ALLE GRANDEZZE FISICHE

GRANDEZZE FISICHE

La nostra conoscenza del mondo **FISICO** è indissolubilmente legata al **metodo sperimentale**: tutte le grandezze che ci servono a descrivere il particolare fenomeno che stiamo di volta in volta studiando sono associate quantitativamente a dei valori che sono ottenuti, direttamente o indirettamente, da un procedimento di misura.



GRANDEZZE FISICHE

Ogni grandezza fisica è caratterizzata dalle sue dimensioni, che permettono di riconoscerla e distinguerla dalle altre. Si deve fare attenzione a non confondere le dimensioni di una grandezza (caratteristica universale) con le sue unità di misura (scelta pratica e soggettiva).

Vi sono alcune grandezze, dette fondamentali, con le quali si possono costruire TUTTE le altre (dette derivate). Le grandezze fondamentali sono: LUNGHEZZA, TEMPO, MASSA, CARICA ELETTRICA.

Le prime due ci consentiranno di ottenere le quantità cinematiche, le seconde due sono proprietà della materia da cui derivano due delle 4 interazioni fondamentali: la gravitazione universale e l'elettromagnetismo. Tutti gli oggetti "massicci" si attraggono tra loro per gravità, tutti gli oggetti carichi si attraggono o si respingono dando vita ai fenomeni elettrici e magnetici.

GRANDEZZE FISICHE

Le dimensioni di una grandezza sono formalmente indicate con una lettera maiuscola tra parentesi quadre (quando non vi sono ambiguità):

$$[G]$$

Così, per le 4 grandezze fondamentali, la notazione è:

$$[L], [T], [M], [Q]$$

Mentre, per esempio, per le grandezze derivate superficie, volume, velocità

$$[S] = [L]^2, [V] = [L]^3, [v] = [L][T]^{-1}$$

LA MISURA DELLE GRANDEZZE FISICHE

GRANDEZZE FISICHE E PROCESSO DI MISURA

Le misure sperimentali richiedono degli apparati complessi o dei semplici strumenti cui è inevitabilmente associata una **PRECISIONE** finita. Non arriviamo mai a conoscere il **VALORE VERO** di ogni grandezza, ma siamo in grado solo di darne una **STIMA**.

Commettiamo così un **ERRORE**, che possiamo teoricamente definire come “la differenza tra il valore osservato e il valore vero”, e che dobbiamo essere concretamente in grado di valutare. E' infatti in base ad esso che potremo scrivere correttamente il risultato dell'operazione di misura.

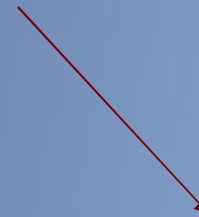
COME SI SCRIVE IL RISULTATO DELLA MISURA

Per effetto delle considerazioni precedenti, dobbiamo concludere che: ogni grandezza fisica G , per essere espressa numericamente, DEVE essere scritta (o pensata) nella forma:

$$G \pm \Delta G$$



Miglior stima del valore vero



Miglior stima dell'errore associato alla stima del valore vero

STRUMENTI DI MISURA

In molte situazioni l'errore da cui siamo limitati in pratica è l'**errore di sensibilità o errore strumentale**. Se ripetiamo più volte la misura nelle stesse condizioni, lo strumento ci fornisce sempre la stessa lettura, e con lo stesso grado di precisione.

STRUMENTI DI MISURA

Pur nella loro varietà, tutti gli strumenti hanno caratteristiche comuni.

Tutti, per esempio, saranno composti da

- un elemento rivelatore, sensibile alla grandezza da misurare;
- un trasduttore, che traduce la grandezza da misurare in una più facilmente accessibile;
- un dispositivo indicatore, che fornisce visivamente il risultato della misura.

I parametri importanti da riconoscere in uno strumento sono:

- L'intervallo di funzionamento, che va da una **soglia (valore minimo)** alla **portata** (valore massimo).
- La **prontezza**, ovvero il tempo necessario perchè lo strumento risponda a una variazione della grandezza misurata.
- La **sensibilità**, ovvero quanto varia la risposta dello strumento alla minima variazione della grandezza misurata.

La relazione tra risposta dello strumento e valore della grandezza fornisce la **taratura o calibrazione**.

ERRORI SISTEMATICI

Sono quelli che risultano in modo riproducibile da un'errata calibrazione degli strumenti o da forzature da parte dell'osservatore. Non sono perciò facili da rilevare e non possono essere evidenziati da un'analisi di tipo statistico, ma solo da un riesame delle condizioni di lavoro e delle tecniche sperimentali.

Esempio: misurando con un metro a nastro metallico il lato di un tavolo, si ottiene un risultato pari a 1.982m. Il metro a nastro è stato calibrato a 25°C, mentre la misura è stata effettuata a 20°C; il coefficiente di espansione lineare del metallo risulta essere $5 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$. La misura di lunghezza va corretta perciò al valore 1.977m.

ACCURATEZZA E PRECISIONE

Sono due concetti solo apparentemente simili, ma in realtà hanno contenuti molto diversi.

L'**accuratezza** esprime quanto prossimo al valore vero è il risultato di un esperimento. Essa dipende da quanto riusciamo a controllare o compensare gli errori sistematici

La **precisione** è una misura di quanto esattamente è determinato il risultato, senza riferimento a ciò che esso significa.

Esempio:

nella misura del lato del tavolo abbiamo una precisione assoluta di circa 1mm (si intende che il tavolo, pessimisticamente, è lungo tra 1.981m e 1.983m), una precisione relativa dell'ordine di una parte su 2000. L'accuratezza del primo risultato era però bassa, perché l'errore sistematico ci portava con l'intervallo di stima della lunghezza "lontano" del valore vero.

ERRORI CASUALI O STATISTICI

Derivano da fluttuazioni statistiche di conteggi o da incertezze strumentali. Se ripetiamo più volte un esperimento nelle stesse condizioni, i risultati possono cambiare di volta in volta, al di là dell'errore strumentale. La precisione di un esperimento dipende da quanto siamo in grado di analizzare gli errori casuali

Tra le cause che producono errori statistici vi sono:

- × Difetti dello strumento (p. es. attriti tra parti dello strumento in moto relativo)
- × Condizioni ambientali variabili e non del tutto controllabili (per esempio, temperatura e pressione rapidamente variabili)
- × Comportamento variabile dello sperimentatore (p.es. nelle misure di tempo manuali)
- × Perturbazioni esterne
- × Disturbo del fenomeno studiato da parte dell'operazione di misura (p.es. lieve deformazione degli oggetti da parte di un calibro)

ERRORI CASUALI O STATISTICI

Gli errori casuali perciò:

- × Sono osservabili solo con uno strumento sufficientemente sensibile, cioè quando sono di entità maggiore dell'errore di sensibilità
- × Possono essere ridotti, non eliminati, con difficoltà crescente con la precisione
- × Posseggono alcune proprietà statistiche e la loro entità può essere stimata

CIFRE SIGNIFICATIVE: DEFINIZIONE FORMALE

- La cifra più a sinistra diversa da zero è la cifra più significativa
- Se non c'è virgola, la cifra più a destra diversa da zero è la cifra meno significativa
- Se c'è la virgola, la cifra più a destra è la cifra meno significativa, anche se essa è uno zero
- Tutte le cifre comprese tra la meno significativa e la più significativa sono significative

Esercizio 1

Quante cifre significative ci sono nei numeri seguenti? Quali sono le più e le meno significative?

976.45; 84000; 0.0094; 301.07; 4.000; 10; 5280; 400.;

$4.00 \cdot 10^2$; $3.010 \cdot 10^4$

CIFRE SIGNIFICATIVE: DEFINIZIONE OPERATIVA

- Le cifre significative sono tutte e sole quelle che ha senso scrivere, ovvero quelle determinate con sufficiente certezza, e vengono evidenziate in modo chiaro dalla notazione scientifica. L'ultima cifra significativa è quella corrispondente all'intervallo di incertezza.
- Nella scrittura di ΔG deve comparire una sola cifra significativa, con l'eccezione di quando questa vale 1.

REGOLE DI ARROTONDAMENTO

Se la frazione è più grande di $1/2$, si aumenta l'ultima cifra significativa;

se la frazione è più piccola di $1/2$, non si modifica l'ultima cifra significativa;

se la frazione è pari a $1/2$, si aumenta l'ultima cifra significativa solo se questa è dispari.

Esercizio 2: arrotondare i seguenti numeri a due cifre significative
4.451, 1.75, 2.045, 1.03, 1.85, 9.999

ELEMENTI DI STATISTICA

DISTRIBUZIONI DEI DATI

Quando, nel caso di errori casuali, ripetiamo la misura più volte, oltre alle discrepanze fra i valori misurati, emergerà dai dati anche un andamento. Questo risulterà più evidente quante più misure verranno effettuate. Se facessimo un numero infinito di misure, potremmo descrivere con esattezza il modo in cui i dati risultano distribuiti.

Ovviamente questo non è possibile, ma possiamo fare l'ipotesi che esista una distribuzione di probabilità con la quale saremo in grado di determinare la probabilità di ottenere un valore specifico in una singola misura (*parent distribution, pd*).

Analogamente, possiamo fare l'ipotesi che le misure siano campioni di un numero infinito di possibili misure che sono distribuite secondo la *pd*.

MEDIA SPERIMENTALE

Se sono state effettuate N misure della grandezza G , che indichiamo con g_1, \dots, g_N , la quantità che useremo come miglior stima del valore vero sarà la *media aritmetica*.

$$m_{\text{exp}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} g_i$$

Chiaramente questo valore cambia al cambiare di N . Per quanto visto, la media della *pd* sarà

$$m_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} g_i$$

DEVIAZIONE STANDARD

Gli *scarti* d_i di ogni misura dal valor medio sono definiti come

$$d_i = g_i - m_{\text{exp}}$$

La media degli scarti risulta nulla, quindi dobbiamo costruire un'altra quantità, se vogliamo misurare la dispersione dei dati attorno alla media, usando tutte le misure effettuate.

La *varianza* è lo scarto quadratico medio

$$s = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1, N} d_i^2$$


Da essa si ricava la *deviazione standard*

$$\sigma_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1, N} d_i^2}$$

Essa misura l'incertezza dovuta alle fluttuazioni nelle osservazioni e perciò corrisponde al nostro ΔG .

COME SI SCRIVE IL RISULTATO DELLA MISURA

Riassumendo, ci sono due situazioni possibili: o prevale l'errore strumentale, o prevale l'errore casuale. Nel primo caso

$$G \pm \Delta G$$


Risultato della misura letto dallo strumento

Errore strumentale

Nel secondo caso, la formulazione precedente si puo' anche scrivere, con le notazioni sin qui usate,

$$m_{\text{exp}} \pm \sigma_{\text{exp}}$$

ESEMPI DI DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

PROBABILITA' TEORICA E SPERIMENTALE

Cos'è la probabilità? Si dice *probabilità* che si verifichi un certo evento il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Per esempio, nel lancio di una moneta, le probabilità che esca “testa” sono di 1 su 2 ($1/2 \Rightarrow 0.5 \Rightarrow 50\%$), dove “1” rappresenta la faccia scelta (casi favorevoli) e “2” il numero delle facce della moneta (casi possibili).

LANCIO DI MONETE NON TRUCCATE

Lancio di una moneta

Risultati possibili: T (testa) C (croce)

Probabilità associate: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Somma delle probabilità: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Lancio di due monete

I moneta	II moneta	risultato	probabilità
----------	-----------	-----------	-------------

T	T	TT	$\frac{1}{4}$
---	---	----	---------------

T	C	TC	$\frac{1}{4}$
---	---	----	---------------

C	T	CT	$\frac{1}{4}$
---	---	----	---------------

C	C	CC	$\frac{1}{4}$
---	---	----	---------------

Somma delle probabilità: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\Pr(\text{TC o CT}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

LANCIO DI DUE DADI

I risultati possibili sono coppie di numeri interi compresi tra 1 a 6. Si possono ottenere, per esempio, con una tabella:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Se ci interessa la somma dei punti ottenuti in ogni lancio, al posto delle coppie inseriamo le somme.

LANCIO DI DUE DADI

Risultati possibili:

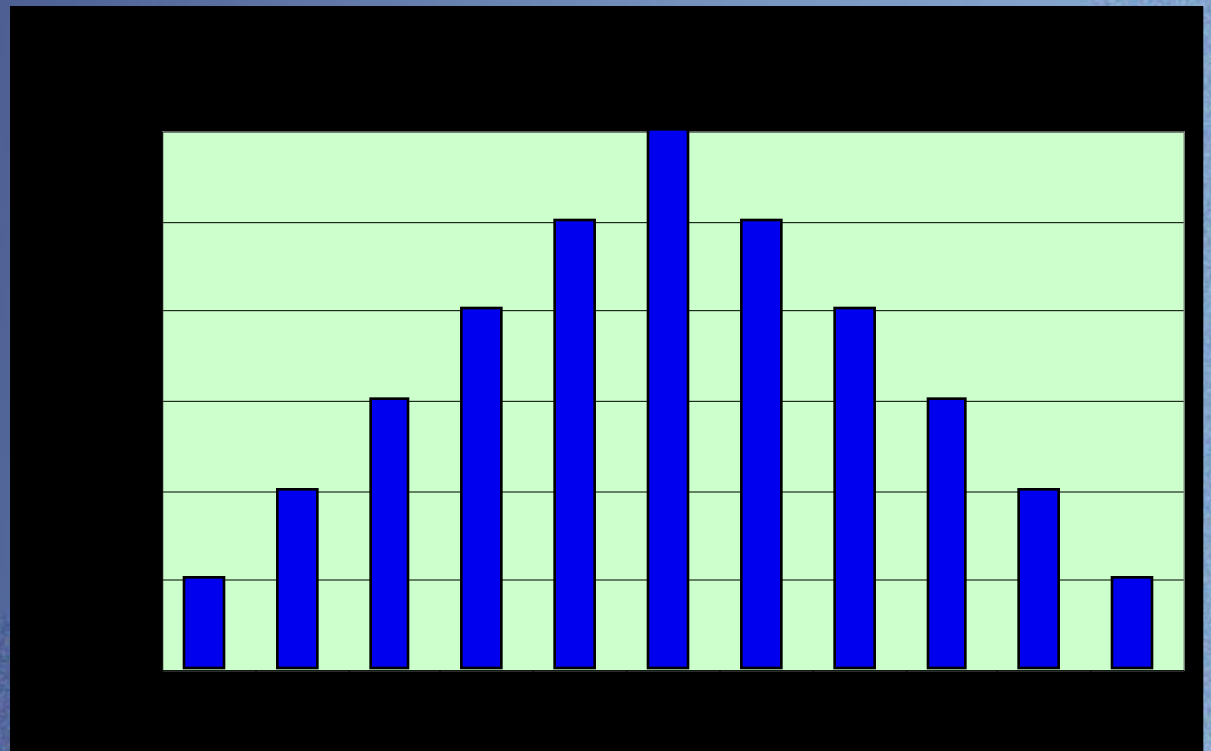
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Probabilità associate:

1/36 2/36 3/36 4/36 5/36 6/36 5/36 4/36 3/36 2/36 1/36

Somma delle probabilità: $2 \times \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1$

La successione delle probabilità associate si dice anche **distribuzione di probabilità**.



VARIABILI CASUALI CONTINUE

- **Definizione:** se la variabile casuale X assume tutti gli infiniti valori di \mathbb{R} , o di un suo intervallo $[a, b]$, è chiamata *variabile casuale continua*.
 - Nel caso di una variabile casuale discreta la distribuzione di probabilità può sempre essere definita assegnando, ad ogni valore che la variabile può assumere, una probabilità positiva tale che la somma delle probabilità sia sempre 1.
 - La distribuzione di probabilità di una variabile casuale continua non può essere specificata nello stesso modo. È impossibile, infatti, assegnare probabilità non nulle a tutti i punti di un intervallo e soddisfare la richiesta che la somma delle probabilità dei distinti valori possibili sia 1.

VARIABILI CASUALI CONTINUE

- Esempio: consideriamo la piovosità giornaliera. Qual è la probabilità di avere una misura di piovosità esattamente di 5.57 cm ossia $P(X = 5.57)$? Non potremmo mai osservare l'esatto valore anche se misurassimo la piovosità per tutta la durata della vita, nonostante si potrebbero avere per molti giorni misure di piovosità fra i 5 e i 6 cm.

VARIABILI CASUALI CONTINUE

- Per una variabile casuale continua X la probabilità $P(c \leq X \leq d)$ è uguale all'area sottesa dalla funzione distribuzione di probabilità $f(x)$ nell'intervallo $[c,d]$.
- Se la variabile casuale X ha una funzione di densità $f(x)$ e $c \leq d$, allora la probabilità che X assuma un valore compreso nell'intervallo $[c,d]$ è:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Distribuzione di Gauss (o normale)

Si consideri un esperimento dove il numero totale di eventi N risulta molto grande, senza alcun limite sulla probabilità p di "successo", a differenza del caso precedente. In questo caso la distribuzione di probabilità si trova come

$$f(x) = A \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2(\Delta x)^2} \right]$$

→ condizione di normalizzazione:

$$A = \frac{1}{\Delta x \sqrt{2\pi}}$$

→ la funzione è simmetrica rispetto a \bar{x}

→ la funzione ha un massimo per $x = \bar{x}$

→ il massimo della funzione vale $f(\bar{x}) = 1/(\Delta x \sqrt{2\pi})$

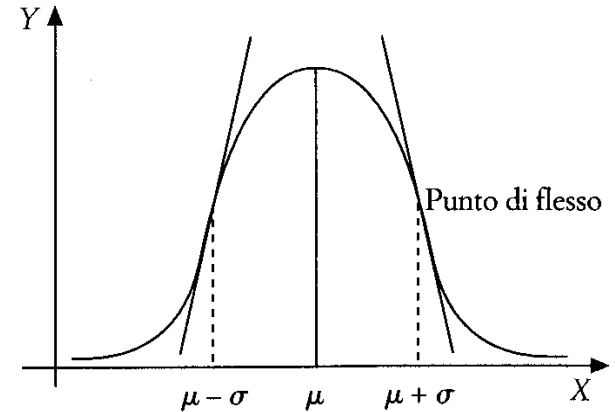
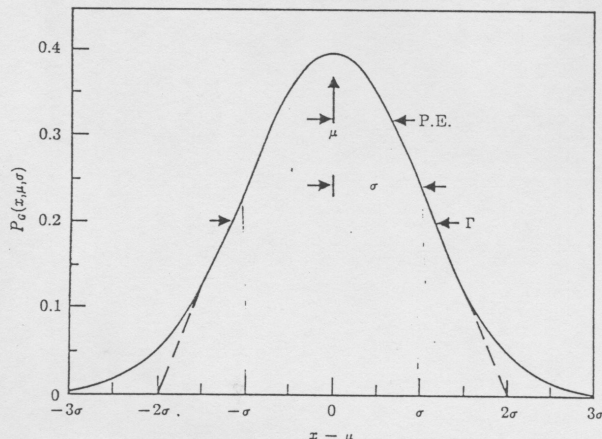
→ i punti di flesso si hanno per $x = \bar{x} \pm \Delta x$

N.B. la distribuzione normale costituisce il caso limite per molte distribuzioni!!

$$\mu = \bar{x}$$

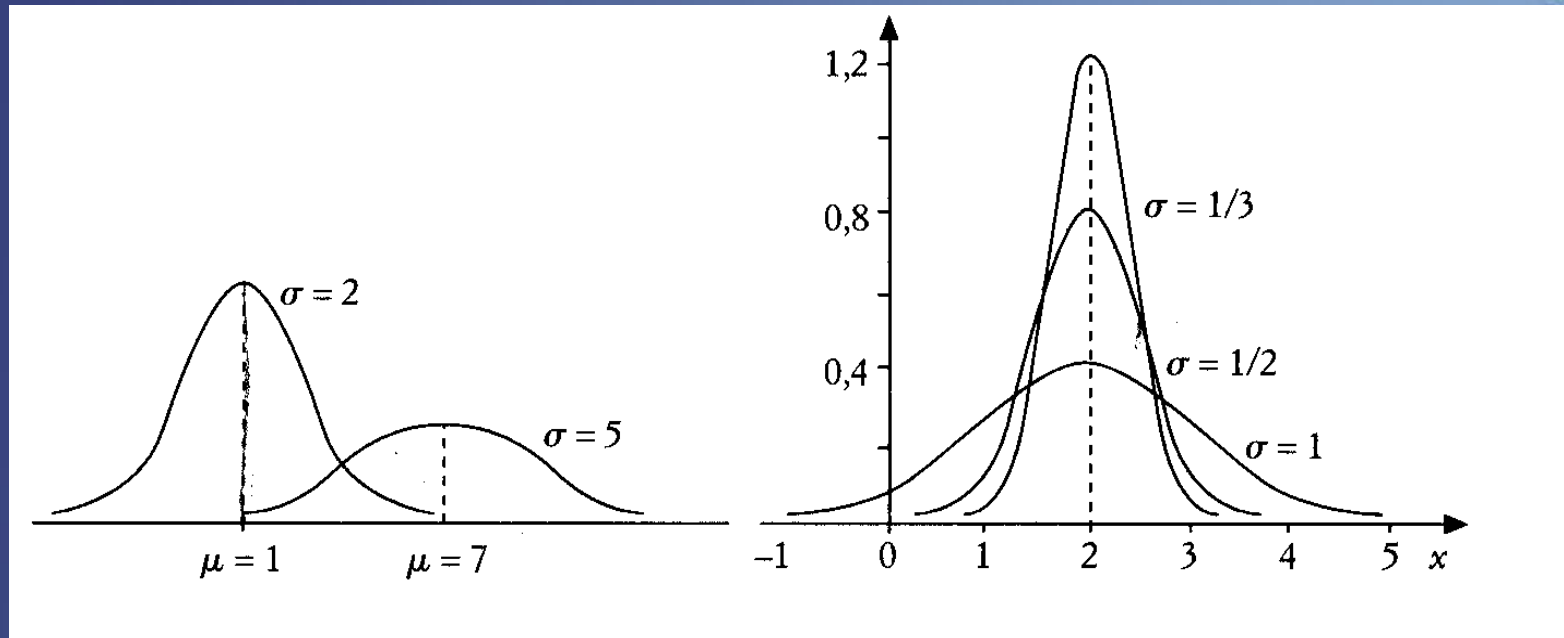
$$\sigma = \Delta x$$

$$\Gamma = 2,354\sigma$$



DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Dalle precedenti formule consegue che ogni distribuzione normale è univocamente definita dalla **media** e dalla **varianza**.



Si può osservare come al variare della media e della varianza la curva subisca sia uno spostamento sull'asse dell'ascissa, sia un appiattimento; mentre se si fa variare solo la varianza e si tiene costante la media, la curva si appiattisce quando la varianza cresce e diventa più appuntita quando la varianza cala, mentre il centro di simmetria rimane lo stesso.

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA

Ecco l'interpretazione statistica della misura sperimentale: poiché il 68.26% dell'area totale della distribuzione normale è compreso tra ± 1 *deviazione standard* attorno alla media, mentre il 95.44% è racchiuso tra ± 2 *deviazioni standard* attorno alla media,

la scrittura

$$G \pm \Delta G$$

va intesa nel seguente modo:

noi riteniamo che il valore vero della grandezza misurata si trovi nell'intervallo

$$[G - \Delta G, G + \Delta G]$$

con una confidenza del 68.26%.

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

ERRORE RELATIVO

Una volta valutato l'errore assoluto ΔG , il rapporto

$$\epsilon_G = \frac{\Delta G}{G} = \frac{\sigma_{\text{exp}}}{m_{\text{exp}}}$$

prende il nome di *errore relativo*, che esprime la bontà della misura di una grandezza. Infatti, lo stesso errore assoluto, associato a misure di valore completamente diverso, assume significati diversi (esempio: pensate a cosa significa un errore di 1 cm nel caso della misura di lunghezza di un tavolo e di un campo di calcio).

MISURE INDIRETTE

Sono quelle in cui, a partire dalla misura diretta di una o più grandezze fisiche, se ne ricava una come loro combinazione.

Esempi:

1. misura del perimetro di una superficie regolare, p.es. un rettangolo

$$p = 2l + 2h$$

2. misura di superficie per l'area di un rettangolo a partire dalla misura a, b dei lati;

$$S = ab$$

3. misura di densità di un cilindro a partire da massa, diametro e altezza.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA

ERRORE MASSIMO

$$p \pm \Delta p = 2(l \pm \Delta l) + 2(h \pm \Delta h) = 2(l + h) \pm 2(\Delta l + \Delta h)$$

Questa relazione è vera anche per la differenza tra grandezze misurate direttamente

$$S \pm \Delta S = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = ab \pm b \Delta a \pm a \Delta b \pm \Delta a \Delta b$$

$$S = ab$$

$$\Delta S \simeq b \Delta a + a \Delta b$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Questa relazione è vera anche per il quoziente, oltre che per il prodotto, mentre per le potenze vale

$$G = f^n \rightarrow \frac{\Delta G}{G} = |n| \frac{\Delta f}{f}$$

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA

ERRORE “STATISTICO”

Se la grandezza misurata indirettamente dipende da più grandezze x_i misurate direttamente e indipendenti tra loro

$$G = G(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$\Delta G = \sqrt{\sum_i \Delta x_i^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2}$$

Che si riduce a un'espressione più semplice quando ci sono in gioco solo prodotti e quozienti o potenze con esponente α_i

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\sum_i |\alpha_i| \frac{\Delta x_i^2}{x_i^2}}$$

ESERCITAZIONE DI LABORATORIO 1

1. Formare 8 gruppi di lavoro; ciascun gruppo ha in dotazione una riga millimetrica, un calibro decimale o ventesimale e un pacchetto con una coppia di dadi, qualche decina di chiodi, un oggetto metallico o in PVC, un cilindro graduato, una bilancia (in condivisione).
2. Misurare con la riga e con il calibro le dimensioni dell'oggetto per determinarne successivamente il volume con l'errore associato. Misurare poi il volume dell'oggetto mediante spostamento di liquido. Confrontare i risultati ottenuti.
3. Misurare indirettamente la densità del materiale dell'oggetto dalla misura di massa e volume (la più precisa).
4. Eseguire 100 lanci ciascuno di una moneta e scrivere la sequenza dei risultati. Costruire il grafico della frequenza relativa per T o C e della differenza tra le frequenze assolute in funzione del numero di lanci effettuati. A lanci conclusi costruire la distribuzione delle frequenze relative per 25, 50, 75 e 100 tentativi. Mettere insieme i risultati del gruppo.
5. Eseguire 100 lanci del doppio dado per gruppo. A lanci conclusi costruire la distribuzione delle frequenze relative.
6. Misurare la lunghezza dei chiodi con il calibro e riportare il risultato in una tabella preliminare. Organizzare i dati riportando le misure in una tabella in ordine crescente e accompagnandole con le eventuali frequenze di uscita. Costruire tre istogrammi cambiando la larghezza dei sottointervalli: uno con numero pari alla radice del numero di misure effettuate, gli altri due con numero sia maggiore che minore di questo. Calcolare la media aritmetica e la deviazione standard sperimentale associate all'insieme di dati. Sovrapporre la gaussiana attesa agli istogrammi ottenuti.

CALIBRO VENTESIMALE

In questo tipo di calibro, sul corpo vengono normalmente incise due scale, una in millimetri e una in frazioni di pollici. Sul corsoio vengono invece incisi dei noni per la lettura di precisione. Pertanto, sulla scala fissa vengono letti i millimetri (o i pollici), sul nonio le relative frazioni.

I noni possono essere decimali, ventesimali o cinquantesimali, e conseguentemente la risoluzione dello strumento potrà essere di 0,1 - 0,05 - 0,02 mm. Noni con risoluzioni superiori non sono convenienti in quanto, per essere leggibili, devono avere dimensioni notevoli. La graduazione sul nonio viene realizzata per i calibri decimali dividendo in 10 parti 9 millimetri della scala principale; per i calibri ventesimali dividendo in 20 parti 19 millimetri della scala principale; per i calibri cinquantesimali dividendo in 50 parti 49 millimetri della scala principale; e così via. Il lato dove è stato inciso il nonio è smussato, per avvicinarlo alla scala della parte fissa, e annullare gli errori di parallasse. Le graduazioni vengono incise e annerite, per evitare che vengano cancellate da abrasioni accidentali.

CALIBRO VENTESIMALE

