# Studio sperimentale della propagazione di un'onda meccanica in una corda

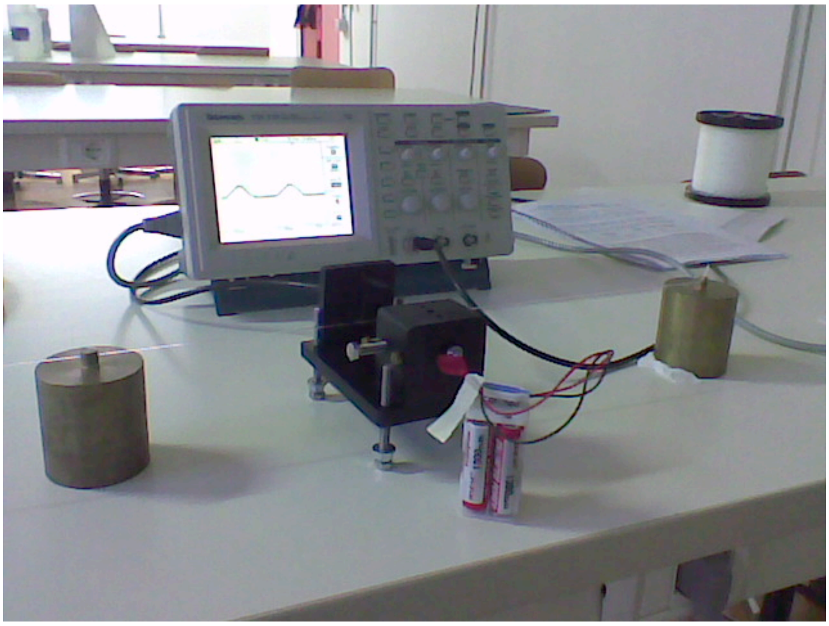

Figura 1: Foto dell'apparato sperimentale.

# 1 Premessa

## 1.1 Velocità delle onde trasversali in una corda

E' esperienza comune che quando si dà una piccola scossa all'estremo di una corda tesa vediamo la perturbazione nella forma della corda da noi provocata spostarsi lungo la corda.

La propagazione osservata prende il nome di *onda*. Le onde sono una modalità di trasporto dell'energia (dando uno scossone abbiamo fatto un lavoro sulla corda e quindi trasferito energia alla corda stessa) senza trasferimento di materia. Nelle *onde meccaniche* la materia si muove solo localmente (oscillazioni del mezzo di propagazione attorno alle posizioni di equilibrio).

Abbiamo onde ogni volta che un sistema continuo ha un comportamento elastico rispetto alle perturbazioni introdotte, cioè risente una forza di richiamo dovuta alla perturbazione proporzionale alla perturbazione stessa.

La corda è un sistema abbastanza semplice per studiare la propagazione ondulatoria. Prima di tutto si tratta di un sistema che possiamo schematizzare come *unidimensionale*, inoltre, facendo l'ipotesi di corda inestensibile, i vari elementi, in cui posso idealmente suddividere la corda, possono muoversi solo in direzione perpendicolare alla corda, quindi perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Pertato nel mezzo da noi trattato possono propagarsi solo *onde trasversali*.

In questa sede vogliamo verificare sperimentale che la velocità di propagazione delle onde dipende unicamente dalle caratteristiche del mezzo.

In particolare è possibile dimostrare che per tutte le onde meccaniche questa velocità dipende dall'elasticità del mezzo e dalla sua inerzia. Nel caso della corda tesa l'elasticità alle deformazioni è fornita dalla forza con la quale tendiamo la corda, cioè dalla *tensione* della corda.

Nell'ipotesi di perturbazioni di piccola ampiezza, per una corda inestensibile e perfettamente flessibile, la tensione (che è un vettore, essendo una forza) risulta in ogni punto tangente alla corda e di modulo costante lungo la corda.

Per semplicità supporremo inoltre il peso della corda trascurabile rispetto alla tensione.

Cerchiamo di evidenziare le grandezze fisiche da cui ci aspettiamo debba dipendere la velocità dell onde nella corda. Le uniche caratteristiche rilevanti della corda sono la sua massa $m$, la sua lunghezza $l$ e la tensione $F$ (in modulo). Nel nostro modello infatti la corda è un oggetto unidimensionale (se vogliamo è l'estensione ad una dimensione del punto materiale).

Vediamo dal punto di vista dimensionale come possiamo legare queste grandezze per ottenerne una velocità. Le dimensioni di $F$ sono quelle di una forza:

$$[F] = [mlt^{-2}]$$

Le dimensioni di $l$ ed $m$ sono ovvie. Le dimensioni della velcità sono invece:

$$[v] = [lt^{-1}]$$

L'equazione dimensionale si scrive:

$$[lt^{-1}] = [(mlt^{-2})^p l^q m^r] \tag{1}$$

dove $p$, $q$ ed $r$ sono gli esponenti incogniti.

Sfruttando le proprietà delle potenze abbiamo:

$$[lt^{-1}] = [m^{p+r} l^{p+q} t^{-2p}]$$

Da queste otteniamo tre equazioni lineari nelle incognite la cui soluzione è:

$$r = -\frac{1}{2},\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$$

Ricordando l'equazione (1), abbiamo in definitiva:

$$[v] = [F^{-\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}}]$$

Pertanto ci aspettiamo (a meno di fattori adimensionali) una espressione di questo tipo:

$$v = \sqrt{\frac{Fl}{m}}$$

Possiamo notare che la grandezza $l/m$ è la densità lineare della corda $\mu$:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{2}$$

La velocità sembra dipendere unicamente dalla densità lineare della corda[1] e dalla tensione.

## 1.2 Onde in una corda fissata agli estremi

Prima di entrare nel problema della corda fissata agli estremi introduciamo un tipo particolarmente importante di onde: le *onde armoniche*. Sono armoniche le onde ottenute scuotendo un estremo della corda con moto armonico. La perturbazione armonica prodotta a un estremo si sposta ed il profilo della corda assume la forma di una funzione sinusoidale (stiamo assumendo che la perturbazione continui indefinitamente, che la corda sia molto lunga e non vi siano fenomeni dissipativi ad attenuare l'onda).

Scegliamo un sistema di assi cartesiani in modo che l'asse delle $x$ coincida con la corda nella posizione di equilibrio (abbiamo supposto il peso trascurabile pertanto la corda all'equilibrio si dispone in modo rettilineo) . Indichiamo con $y$ la posizione trasversale dell'elemento di corda. L'onda è descritta dal valore assunto da $y$ nello spazio-tempo:

$$y = y(x, t)$$

dove $x$ è la posizione lungo la corda e $t$ l'istante di tempo considerato. Tuttavia la dipendenza da $x$ e da $t$ non è arbitraria.

[1]anche se non lo abbiamo segnalato esplicitamente, facciamo l'ipotesi che la corda sia illimitata, almeno ad un estremo, per evitare di discutere in prima istanza gli effetti causati dalla presenza degli estremi. Pertanto nel caso di una corda indefinitamente lunga non ha senso parlare della massa o della lunghezza, che sarebbero infinite, ma solo della densità! Vedremo tra poco le conseguenze dei vincoli su una corda di lunghezza finita.

Quello che caratterizza infatti un'onda è la peculiare dipendenza spazio-temporale:

$$y = y(x - vt)$$

dove $v$ è la velocità delle onde nel mezzo.

Nel caso di un'onda armonica l'espressione matematica della perturbazione che si propaga è:

$$y = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \varphi\right] \tag{3}$$

dove $A$ indica l'ampiezza dell'onda, $\lambda$ la lunghezza d'onda e $T$ il periodo, infine $\varphi$ è la fase iniziale dell'onda. Per capire il significato di fase iniziale ricordo che con il termine *fase* si indica l'argomento del seno in (3). Dunque, per $x = 0$ e $t = 0$, $\varphi$ rappresenta la fase dell'onda. Questa costante viene aggiunta per tenere conto di tutte le possibili condizioni iniziali.

Se scegliamo il segno meno nella (3) l'onda si sposta nel verso positivo dell'asse delle $x$ (*onda progressiva*), con il segno più invece l'onda si sposta in verso opposto (*onda regressiva*).

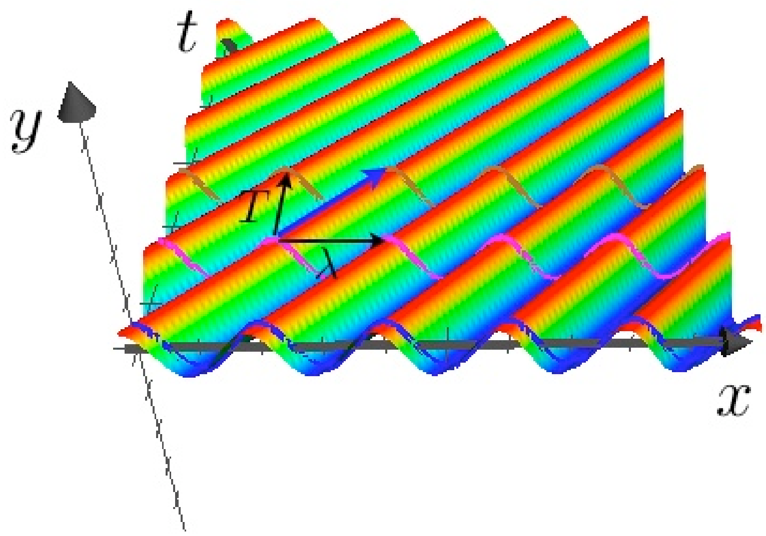


Figura 2: Onda armonica unidimensionale visualizzata nello spazio-tempo. Il periodo spaziale è $\lambda$, quello temporale $T$.

In Figura 2 viene mostrata l'onda armonica progressiva nello spazio-tempo (questa visualizzazione è possibile perché l'onda è unidimensionale!).

In pratica il grafico mostra il profilo di una corda sulla quale viaggia un'onda armonica: grazie all'aggiunta dell'asse dei tempi abbiamo una fotografia del profilo della corda per ogni istante di tempo. Dalla figura appare chiaro che l'onda armonica è periodica nello spazio e nel tempo, essendo $\lambda$ il *periodo spaziale* e $T$ il *periodo temporale* (ogni elemento di corda oscilla di moto armonico di periodo $T$).

La veloctià dell'onda armonica può essere scritta come:

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{4}$$

infatti, come è possibile osservare in figura, in un intervallo di tempo pari a $T$ l'onda si è spostata di $\lambda$.

Adesso consideriamo un'onda armonica di lunghezza d'onda $\lambda$ lungo una corda con gli estremi fissati. L'onda inizialmente si sposta ma incontrando gli ostacoli si riflette e si sovrappone con se stessa. Se $\lambda$ assume certi valori (dipendenti dalla lunghezza della corda) la situazione a regime è quella di un'*onda stazionaria*: l'onda resta confinata nello spazio.

Per chiarire questa affermazione osservate la Figura 3 e ricordate che la corda è vincolata ad avere gli estremi fissi.

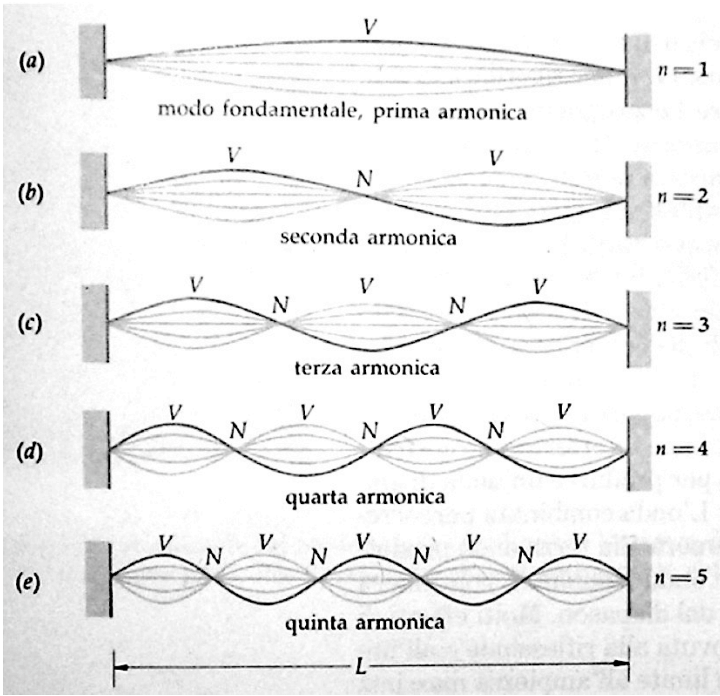


Figura 3: Onde stazionarie in una corda fissata agli estremi.

Le lunghezze d'onda $\lambda$ per le quali si hanno onde stazionarie sono tali che:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \tag{5}$$

con $n$ intero. Per $n = 1$ parlo di prima armonica (o armonica fondamentale), per $n = 2$ di seconda armonica, ecc... Le lettere $N$ indicano i nodi dell'onda stazionaria, cioè i punti che rimangono fermi al passare del tempo (dunque se ci sono punti che restano sempre fermi è evidente che non siamo di fronte ad una dipendenza spazio-temporale del tipo $(x-vt)$ cioè non si tratta di un'onda viaggiante). In particolare l'ampiezza del moto armonico dei singoli elementi di corda dipende dalla posizione dell'elemento lungo la corda: i punti $V$ sono detti ventri perché l'ampiezza di oscillazione è massima. Tra nodi e ventri vi sono tutte le possibili situazioni intermedie.

Dal momento che anche le onde armoniche sazionarie nascono dalla sovrapposizione di onde armoniche viaggianti esiste la stessa relazione tra periodo temporale e lunghezza d'onda, che riscrivo:

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{6}$$

Usare un'onda stazionaria per misurare la velocità delle onde è uno stratagemma molto comodo: infatti il vincolo impone delle condizioni sulle lunghezza d'onda possibili e dunque la misura della lunghezza d'onda risulta immediatamente nota dalla misura di $L$.

Se pizzichiamo una corda fissata agli estremi (come una corda di chitarra) la perturbazione risultante non è una semplice onda stazionaria armonica. Tuttavia un importante teorema matematico (Teorema di Fourier) ci assicura che qualunque funzione periodica (sufficientemente regolare) può essere espressa come somma (infinita) di armoniche. Dunque dalla lunghezza di una corda possiamo stabilire subito che l'armonica fondamentale ha lunghezza d'onda $2L$, e conosciamo, dalla relazione ricavata precedentemente, anche le lunghezze d'onda delle altre armoniche che contribuiscono all'oscillazione della corda. Usando l'espressione della velocità si trova immediatamente che il periodo dell'armonica fondamentale è $T = \frac{2L}{v}$.

Provate a pensare per esercizio a come cambia la nota di una corda di chitarra al variare della lunghezza, della densità e della tensione della corda (ricordo che l'altezza della nota è legata al periodo: tanto più piccolo è il periodo tanto maggiore è l'altezza della nota riprodotta) e vedrete che la nostra ipotesi sulla velocità delle onde nella corda tesa appare essere sensata, almeno qualitativamente, oltre che dimensionalmente corretta.

Tra poco vedremo come mettere a frutto tutte queste idee nella nostra misura.

## 2 Scopo dell'esperienza

Scopo dell'esperienza è verificare che l'espressione della velocità delle onde nella corda sia effettivamente quella ipotizzata nella premessa. Inoltre determinare la densità della corda e confrontarla con il valore ottenuto dalla misura della massa di un pezzo di corda di lunghezza nota.

## 3 Materiali

A disposizione avete:

- filo di nylon;
- supporti per la sospensione del filo;
- una massa per tensionare il filo;
- una carrucola;
- bilancia elettronica;
- metro a nastro;
- sistema di rivelazione diodo laser-fotodiodo;
- oscilloscopio digitale.

## 4 Descrizione dell'apparato sperimentale

L'apparato sperimentale è schematizzato in figura:

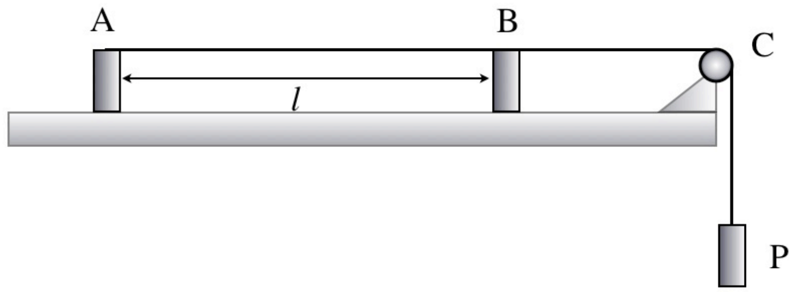


Figura 4: Schema dell'apparato sperimentale: sostegno fisso ($A$), sostegno mobile ($B$), carrucola ($C$), peso ($P$).

Il filo di nylon viene legato ad un estremo al supporto fisso $A$, viene fatto passare attraverso un forellino sul supporto mobile $B$ e in seguito fatto passare sulla gola di una carrucola fissata all'estremità del tavolo. La tensione della corda è garantita dalla massa appesa di peso $P$ (in modulo). Spostare il supporto $B$ consente di variare la lunghezza $L$ della corda che può vibrare. La tensione del filo vale:

$$F = mg \tag{7}$$

con $m$ valore della massa appesa all'estremo libero del filo.

La lunghezza $L$ misurata direttamente con il metro è legata alla lunghezza d'onda dell'armonica fondamentale, come abbiamo visto prima: $\lambda = 2L$.

Per misurare una velocità, secondo la definizione operativa, dobbiamo misurare una lunghezza ed un tempo. Sfortunatamente i tempi caratteristici del fenomeno in esame (il periodo $T$ dell'onda) sono troppo rapidi per il nostro occhio, come possiamo verificare *a posteriori*... dobbiamo quindi usare uno strumento sensibile e preciso.

Per fare questo posizioniamo nella zona centrale della corda tesa il sensore in figura:

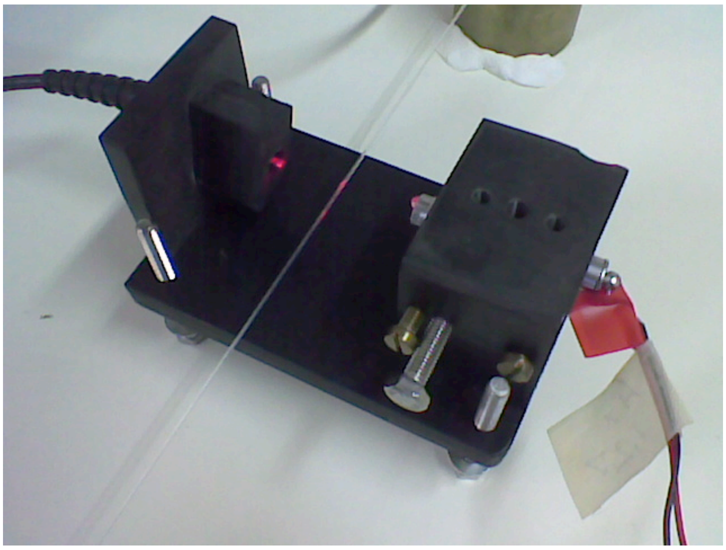

Figura 5: Dettaglio del sistema *diodo laser-fotodiodo*.

Questo è costituito da un diodo laser e da un fotodiodo rivelatore. Ai capi del fotodiodo c'è una defferenza di potenziale che possiamo visualizzare su un canale dell'oscilloscopio digitale a disposizione. Se posizioniamo il rivelatore in modo che sia appena sotto (o sopra) la corda e pizzichiamo la corda stessa al centro osserveremo sullo schermo dell'oscilloscopio che la differenza di potenziale ai capi del fotodiodo varia periodicamente. La ddp ai capi del fotodiodo è infatti circa proporzionale alla potenza luminosa incidente: nel suo movimento oscillatorio la corda "eclissa" il fotodiodo una volta ogni periodo (se posizioniamo il rivelatore nel modo giusto) e in corrispondenza di queste eclissi ho un picco nello schermo[2].

Pizzichiamo la corda al centro, dove abbiamo posto il rivelatore, perché con queste condizioni iniziali possiamo ritenere che il moto risultante della corda sia praticamente lo stesso che si avrebbe considerando la sola armonica fondamentale, senza altre complicazioni.

La misura del periodo dell'onda stazionaria si effettua misurando il tempo $T$ sullo schermo dell'oscilloscopio tra due occultazioni del fotodiodo successive (cioè fra due picchi consecutivi). Sfortunatamente le onde stazionarie sollecitate in questo sistema si smorzano rapidamente. Occorre quindi ricorrere alla funzione di "fermo immagine" disponibile sugli oscilloscopi digitali. Questo fermo immagine consente di effettuare comodamente la misura di $T$, utilizzando i comandi dell'oscilloscopio per modificare la posizione del segnale visualizzato e aggiustando la sensibilità dello strumento in modo da rendere la misura più precisa possibile.

# 5 Descrizione dell'esperienza

Entriamo in dettaglio nelle operazioni di misura:

1. spostando il supporto mobile seleziona una lunghezza $L$ della corda e misurala con il metro a nastro;

2. posiziona al centro del tratto di corda di lunghezza $L$ il rivelatore, pizzica la corda e misura il periodo $T$ con l'osciloscopio;

3. ripeti la misura di $T$ per 10 valori di $L$.

Dal momento che:

$$v = \frac{2L}{T}$$

e dall'ipotesi fatta per $v$:

[2]è bene sottolineare fin da subito che lo schermo dell'oscilloscopio non mostra la forma dell'onda meccanica nella corda, ma come varia il segnale elettrico ai capi del fotodiodo in funzione del tempo.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ci aspettiamo che valga la relazione:

$$T = 2L\sqrt{\frac{\mu}{F}} \tag{8}$$

- Riporta in grafico $T^2$ in funzione di $L^2$ e verifica che, entro gli errori sperimentali si tratta di una retta passante per l'origine;
- determina, con il consueto metodo grafico, il valore del coefficiente di questa retta e l'errore corrispondente;
- indicando con $A$ il coefficiente della retta abbiamo:
  $$A = 4\frac{\mu}{F}$$
  dal momento che $F = mg$, allora
  $$A = 4\frac{\mu}{mg}$$
  Misura quindi la massa $m$ del corpo appeso con la bilancia e determina $\mu$ con la relazione:
  $$\mu = \frac{Amg}{4}$$
  determina l'errore su $\mu$ con la relazione:
  $$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta m}{m}$$
  (assumi l'errore relativo su $g$ trascurabile rispetto agli altri errori in gioco);
- misura la massa di un pezzo di filo di nylon di lunghezza $l$ (misurata con il metro a nastro) e determina $\mu$ dal rapporto tra la massa del filo e la sua lunghezza.
- confronta la densità $\mu$ del filo ottenuta con i due procedimenti.

Il confronto tra le due misure di $\mu$ consente di verificare la relazione (2) ipotizzata per la velocità delle onde nella corda tesa. Infatti, dal momento che tutte le considerazioni fatte sono conseguenza della relazione (2), se le due misure risultano compatibili entro gli errori non abbiamo motivo di dubitare, sulla base delle nostre prove sperimentali, l'ipotesi fatta.