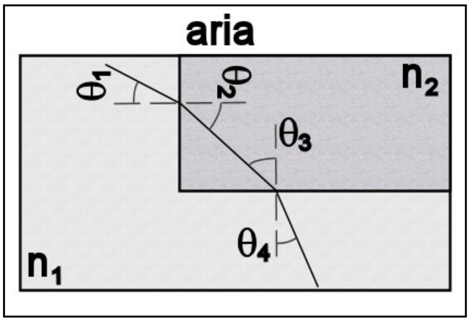
Dalla prova in itinere del 23/06/04 versione N° 7

Un raggio di luce incide con un angolo θ_1 =28° su l'interfaccia tra due materiali trasparenti di indici di rifrazione n_1=1.5 ed n_2= 1.2 immersi in aria. Una parte della luce viene rifratta e dopo un certo tratto incide sulla superficie di separazione fra i due materiali per rientrare nel primo. Determinare:

a) L'angolo θ_4 con il quale il raggio percorre la seconda volta il mezzo n_1;

b) Il valore di θ_1* affinché il fascio non fuoriesca in aria dopo aver attraversato per la seconda volta n1.



Soluzione

Nei problemi di rifrazione le uniche cose da tenere a mente sono: gli angoli da mettere nella legge di Snell sono sempre quelli compresi fra il raggio e la perpendicolare all'interfaccia fra i due mezzi; la legge di Snell; se usando questa legge per trovare l'angolo di uscita vi trovate a fare l'arcoseno di un numero maggiore di 1 non è detto che abbiate sbagliato i conti, la soluzione potrebbe essere che c'è riflessione totale e nessun raggio viene rifratto.

Detto questo iniziamo a seguire il fascio: si parte con un angolo d'incidenza θ_1 , per trovare l'angolo di rifrazione si applica la legge:

$$n_2 sen(\theta_2) = n_1 sen(\theta_1) \Rightarrow \theta_2 = arcsen\left(\frac{n_1 sen(\theta_1)}{n_2}\right) = 35.93°$$

e siamo nel secondo mezzo. Per poter rientrare nel primo occorre trovare l'angolo θ_3 che è semplicemente 90°-θ_2, quindi:

$$n_1 sen(\vartheta_4) = n_2 sen(\vartheta_3) \Rightarrow \theta_4 = arcsen\left(\frac{n_2 sen(\vartheta_3)}{n_1}\right) = 40.37°$$

Per trovare l'angolo θ_1* tale che si abbia riflessione totale nell'interfaccia fra il primo mezzo e l'aria, conviene esprimere l'angolo θ_1 in funzione dell'angolo nel primo mezzo all'interfaccia con l'aria (che avrà lo stesso valore di θ_4) e poi porre quest'ultimo uguale all'angolo limite:

$$\vartheta_1{*} = arcsen\left(\frac{n_2 sen(\vartheta_2{*})}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{n_2 sen(90-\vartheta_3{*})}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{n_2 \cos(\vartheta_3{*})}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{n_2\sqrt{1-sen^2(\vartheta_3{*})}}{n_1}\right) =$$

$$= arcsen\left(\frac{n_2\sqrt{1-\left(\frac{n_1 sen(\vartheta_{4L})}{n_2}\right)^2}}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{\sqrt{n_2^2-(n_1 sen(\vartheta_{4L}))^2}}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{\sqrt{n_2^2-1}}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{\sqrt{1.2^2-1}}{1.5}\right) = 26.24°$$

dove abbiamo usato la formula per l'angolo limite: $n_1 sen(\theta_{4L})$ = 1 perché nell'aria n = 1 e vogliamo che l'angolo di uscita sia 90°. Quindi si ha riflessione totale per tutti gli angoli minori di θ_1*.

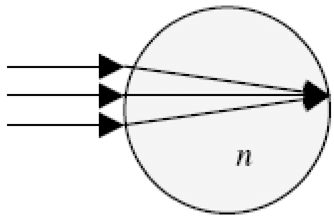
Dall'appello del 10/9/04

Un fascio di luce parallelo emesso da un laser incide su una sfera piena trasparente di materiale con indice di rifrazione *n*, come in figura immersa in acqua (n_1=1.33). Il fascio ha larghezza piccola rispetto al raggio della sfera. Determinare:

a) l'indice di rifrazione della sfera perché, se possibile, il fascio laser sia focalizzato sul fondo della sfera;

b) l'indice di rifrazione della sfera perché, se possibile, il fascio laser sia focalizzato nel centro della sfera.

Soluzione



In questo problema abbiamo un fascio che passa da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad uno con indice di rifrazione n ed in più lo fa attraverso la superficie di una sfera. Quindi dobbiamo usare qualche formula che abbia dentro sia in qualche modo la legge di Lens per dirci cosa succede alla luce quando cambia l'indice di rifrazione, sia qualcosa di simile alla legge delle lenti perché abbiamo una superficie curva. In effetti c'è una generalizzazione della legge delle lenti sottili nota come equazione del diottro che si scrive come:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{i}=\frac{n_2-n_1}{R}$$

dove come al solito *p* è la coordinata dell'oggetto, che si trova nel mezzo con n_1 e *i* quella dell'immagine, che si trova nel mezzo con n_2. Vediamo come applicarla al nostro caso: dove sta l'oggetto? In generale per trovare l'oggetto bisogna cercare il punto in cui convergono i raggi (o i loro prolungamenti) che provengono da sinistra. Il problema è che nel nostro caso i raggi sono paralleli, quindi non s'incontrano mai, o come si dice: s'incontrano all'infinito. Bene, la coordinata *p* nel nostro problema vale infinito! Per quanto riguarda l'immagine, il problema è più semplice perché se i raggi si devono focalizzare in fondo alla sfera, è li che deve trovarsi, quindi la coordinata *i* deve essere uguale al diametro. A questo punto il gioco è fatto, basta riscrivere l'equazione scritta sopra mettendoci quello che abbiamo appena trovato:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n}{i}=\frac{n-n_1}{R}\Rightarrow\frac{n}{2R}=\frac{n-n_1}{R}\Rightarrow n_1=n-\frac{n}{2}\Rightarrow n=2n_1=2.66$$

Per la seconda domanda si ragiona nello stesso modo, solo che ora la coordinata dell'immagine deve valere R:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n}{i}=\frac{n-n_1}{R}\Rightarrow\frac{n}{R}=\frac{n-n_1}{R}\Rightarrow n_1=0\Rightarrow \textit{impossibile}!!$$

Niente di allarmante: vuol dire che non esiste nessun materiale in grado di fare questo.