Esercizio 1

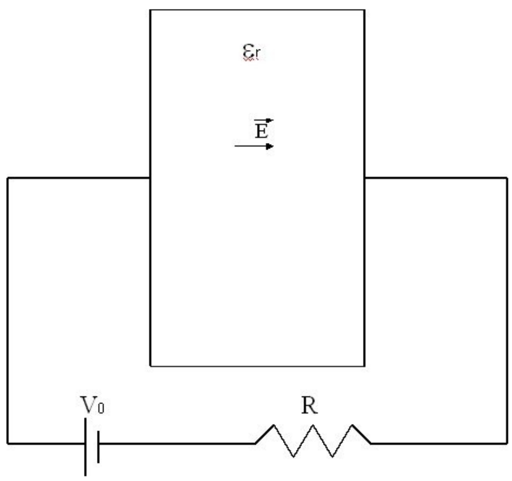
Un condensatore piano ha le seguenti caratteristiche: area delle armature **A** = 10^{-4} m^2 , capacita **C** = 0.05 μF. E' riempito interamente con un dielettrico di costante **ε** = 5.6 e rigidità elettrica $\mathbf{r_p}$ = $14*10^6$ V/m. Il condensatore è messo in serie ad una resistenza di valore **R** = 20000 Ω. All'istante **t** =0 il sistema viene collegato ad un generatore di tensione continua da $\mathbf{V_0}$ =20000Volts.
Determinare:

1) il tempo caratteristico di carica del condensatore
2) Il campo che si avrebbe nel condensatore dopo un tempo infinito.
3) L'istante in cui il condensatore esplode (perché il campo elettrico ha superato il valore della rigidità elettrica del materiale)
4) L'energia immagazzinata nel condensatore al momento dell'esplosione

Soluzione

Dato che il condensatore è messo in serie con una resistenza, per calcolare il tempo caratteristico basta usare la formula:
$\tau = RC$

Dopo un tempo infinito il potenziale ai capi del condensatore è uguale a $\mathbf{V_0}$. Per calcolare il campo che si avrebbe in questo caso dentro il condensatore, si può applicare il teorema di Gauss ed il principio di sovrapposizione degli effetti per tener conto di entrambe le armature.



Arriviamo alla formula per il campo elettrico:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

dove si è usato $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ per tener conto del dielettrico presente dentro il condensatore e **σ** è la densità di carica presente sulla superficie dell'armatura. Quest'ultima si trova subito conoscendo la capacità del condensatore, il voltaggio applicato e la superficie dell'armatura:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV_0}{S} \Rightarrow E = \frac{CV_0}{S\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Questo campo e' maggiore della rigidità dielettrica del materiale. Questo vuol dire che ad un certo istante il campo formato dentro il condensatore sarà così intenso da iniziare a strappare qualche elettrone dalle molecole del dielettrico. Gli elettroni vaganti verranno accelerati e urtando le altre

molecole produrranno altri elettroni in un effetto a catena che provocherà un corto circuito con conseguente distruzione del condensatore.
Per calcolare l'istante dell'esplosione dobbiamo scrivere come varia la tensione nel condensatore in funzione del tempo. Sapendo che la corrente nel circuito varia secondo la legge:

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad **$$

si vede che la tensione cercata deve variare come:

$$V_C = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

questo implica che il campo dentro il condensatore varia come:

$$E(t) = \frac{CV(t)}{A\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{CV_0}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

quindi per trovare l'istante fatidico, basta eguagliare questa quantità alla rigidità dielettrica del materiale e ricavare il tempo:

$$r_p = \frac{CV_0}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{r_p A\varepsilon_0\varepsilon_r}{CV_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{r_p A\varepsilon_0\varepsilon_r}{CV_0} \Rightarrow t = \tau \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{r_p A\varepsilon_0\varepsilon_r}{CV_0}}\right)$$

infine per trovare l'energia immagazzinata al momento dell'esplosione, basta sostituire il valore del tempo appena trovato nell'espressione dell'energia del condensatore:

$$U(t) = \frac{1}{2}CV(t)^2$$

**

Per trovare l'espressione scritta sopra per la corrente in funzione del tempo in un circuito RC, basta scrivere l'espressione della tensione **V_0** come somma di una parte dovuta alla resistenza e l'altra dovuta al condensatore. Supponendo di partire con quest'ultimo completamente scarico, la tensione iniziale ai capi della resistenza sarà proprio **V_0**. Man mano che il condensatore si carica, la tensione sulla resistenza diminuirà, essendo la differenza fra quella iniziale e quella ai capi del condensatore. Infatti possiamo scrivere che :

$$V_0 = V_R + V_C = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$$

essendo la tensione ai capi del condensatore dovuta alla carica accumulata dall'istante iniziale a quello considerato, diviso per la sua capacità (la formula di sempre C=Q/V quindi V=Q/C). Derivando entrambi i membri dell'equazione così ottenuta rispetto al tempo si arriva ad un'equazione differenziale lineare del prim'ordine per la corrente:

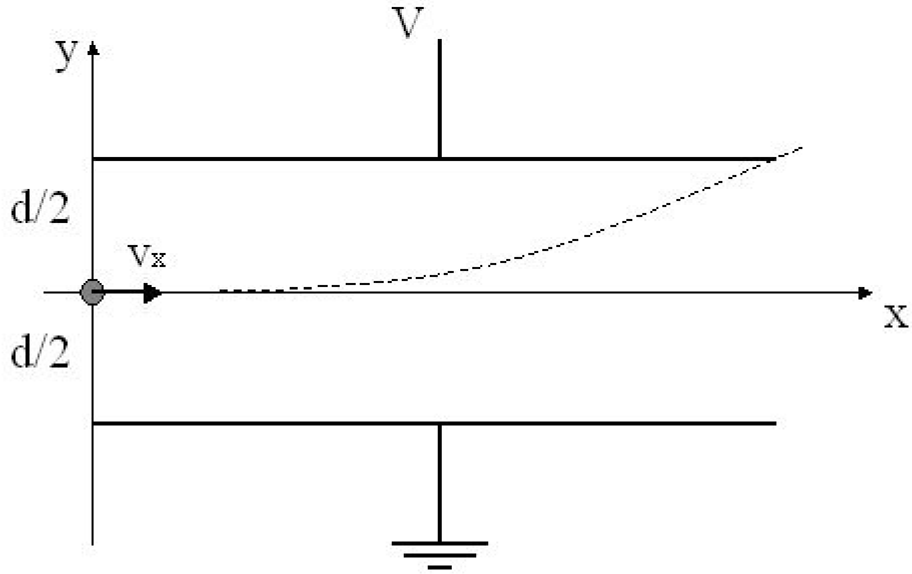
$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}i(t) \Rightarrow i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \quad \tau = RC$$

che e' quanto cercavamo, con **$i_0=V_0/R$** come condizione iniziale.

Esercizio 2

Un elettrone viene lanciato con velocità $\mathbf{v_x}$ = 100 m/s parallelamente alle armature di un condensatore piano e esattamente a uguale distanza fra queste. Il condensatore ha lunghezza **L** = 10 cm e distanza fra le armature **d** = 0.1 cm. Determinare il voltaggio da applicare ai capi del condensatore in modo che l'elettrone riesca ad uscire sfiorando il bordo di una delle armature.

Soluzione



Mettendo gli assi come in figura, si può scomporre il moto dell'elettrone nella sua componente verticale ed in quella orizzontale. Quest'ultima segue le leggi del moto uniforme, in quanto non ci sono forze orizzontali sull'elettrone. Mentre per la componente verticale si tratta di un moto uniformemente accelerato, in quanto dentro il condensatore e' presente un campo costante che darà una forza costante. Quindi possiamo scrivere:

$$x = v_x \cdot t \Rightarrow \ L = v_x \cdot t_f \Rightarrow \ t_f = \frac{L}{v_x}$$

una volta trovato l'istante finale in cui l'elettrone arriva alla fine del condensatore, bisogna imporre che a quell'istante esso abbia percorso esattamente lo spazio che lo separava da una delle due armature:

$$y = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \ \frac{d}{2} = \frac{1}{2}at_f^2 \Rightarrow \ a = \frac{d}{t_f^2} = \frac{d \cdot v_x^2}{L^2}$$

questa accelerazione deve essere data dalla forza dovuta al campo elettrico, quindi:

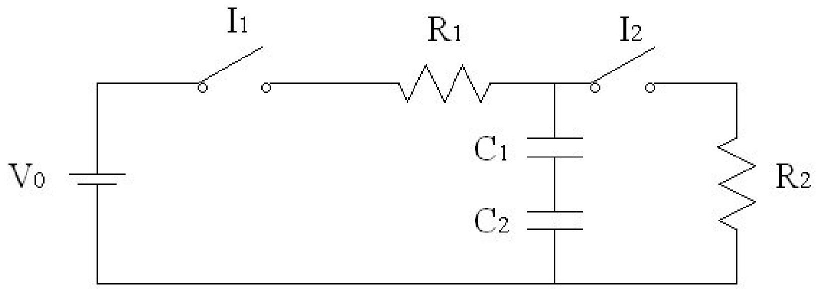
$$a = \frac{d \cdot v_x^2}{L^2} = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} \Rightarrow \ E = \frac{mdv_x^2}{qL^2} \Rightarrow \ V = Ed = \frac{md^2v_x^2}{qL^2}$$

che quindi risulta il potenziale da applicare in modo che l'elettrone sfiori il condensatore.

Esercizio 3

Si consideri un circuito come in figura, con i seguenti parametri: $\mathbf{V_0}$ = 10 V, $\mathbf{R_1}$ = 1000 Ω, $\mathbf{R_2}$ = 1M Ω , $\mathbf{C_1}$ = 150 μF , $\mathbf{C_2}$ = 300 μF. All'istante **t** = 0, viene chiuso l'interruttore $\mathbf{I_1}$ mentre l'interruttore $\mathbf{I_2}$ rimane aperto, in modo da caricare i due condensatori in serie alla resistenza $\mathbf{R_1}$. Dopo un tempo $\mathbf{t_c} = 2\boldsymbol{\tau_c}$,dove $\boldsymbol{\tau_c}$ è il tempo caratteristico di carica del sistema condensatori più resistenza, viene aperto $\mathbf{I_1}$ e chiuso $\mathbf{I_2}$, in modo che si abbia la scarica dei condensatori sulla resistenza $\mathbf{R_2}$. Calcolare:

1) I due tempi caratteristici di carica $\boldsymbol{\tau_c}$ e di scarica $\boldsymbol{\tau_s}$ dei condensatori
2) Il voltaggio raggiunto al tempo $\mathbf{t_c}$ dal sistema dei due condensatori (cioè il voltaggio presente ai capi del condensatore equivalente) e l'energia immagazzinata.



Soluzione

Prima di tutto calcoliamo la capacità equivalente dei due condensatori. Essendo messi in serie si ha:

$$C_E = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

A questo punto per trovare il tempo di carica dovremo considerare come circuito RC semplicemente quello formato dalla capacità equivalente $\mathbf{C_E}$ e dalla resistenza $\mathbf{R_1}$, essendo l'altra resistenza scollegata. Quindi il tempo caratteristico di carica sarà uguale a:

$$\tau_C = R_1 \cdot C_E$$

Analogamente, per il tempo di scarica dovremo considerare solo la resistenza $\mathbf{R_2}$, quindi avremo:

$$\tau_S = R_2 \cdot C_E$$

Come nell'esercizio 1, la tensione ai capi della capacità equivalente in funzione del tempo durante il periodo di carica sarà:

$$V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

quindi dopo un tempo $\mathbf{2\boldsymbol{\tau}}$ sarà data da:

$$Vc(2\tau) = V_0\left(1 - e^{-2}\right)$$

e l'energia immagazzinata:

$$U(2\tau) = \frac{1}{2} C_E V_0^2 \left(1 - e^{-2}\right)^2$$

dove si e' usata la solita espressione per l'energia del condensatore e il voltaggio appena trovato.