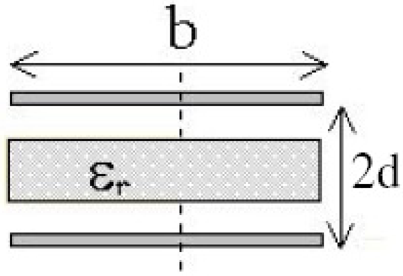
Esercizio 1 (dall'appello 16/7/04)

Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di lato b separate da una distanza 2d. Il condensatore viene completamente caricato alla tensione V_0 e poi scollegato dalla batteria usata per caricarlo, così resta isolato dall'esterno. Una lastra quadrata di lato b, costante dielettrica εr, e spessore pari al 50% della distanza tra le armature è inserita centralmente tra le armature del condensatore (vedi figura). Si determini, dopo l'inserimento della lastra nel condensatore:

a) la sua capacità;

b) l'energia immagazzinata al suo interno (Attenzione il sistema è sempre isolato e scollegato dalla batteria).



Soluzione

Si noti che in questo problema la batteria viene scollegata prima di cambiare la capacità del sistema, quindi la carica presente sulle armature non può andare da nessuna parte; questo è un processo a carica costante. Se avessimo tenuto collegata la batteria invece avremmo avuto un processo a potenziale costante in cui sarebbe stata la carica sulle armature a variare.

Iniziamo il conto considerando, come chiede il problema, un condensatore vuoto. Per il calcolo della capacità si può partire dalla sua definizione: $C = \frac{Q}{\Delta V}$ e dalla relazione fra la differenza di potenziale ed il campo elettrico: $\Delta V = \int E dx$. In effetti la carica presente nelle armature del condensatore dipende dal potenziale applicato, così come il campo elettrico. Quindi se riesco ad esprimere il potenziale in funzione della carica attraverso il campo elettrico, posso sperare di poterla semplificare con il numeratore. In questo modo ottengo una capacità non dipendente dal potenziale applicato, quindi dipendente solo dalle caratteristiche geometriche e fisiche del condensatore, come deve essere.

Vediamo dunque come esprimere il potenziale in funzione della carica. Supponendo che questa valga Q allora applico il teorema di Gauss e prendo un cilindro con asse perpendicolare alla piastra superiore e superfici sopra e sotto di essa. In questo modo posso trovare il campo elettrico all'interno del condensatore:

$$E_1 = \frac{Q}{A\varepsilon_0} = E_3$$

Una volta trovato il campo applico la definizione di potenziale $\Delta V = \int E dx$ e posso così esprimere la capacità come:

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

Mentre l'energia vale:

$$U_0 = \frac{Q^2}{2C_V} = \frac{Q^2 2d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A}$$

Ora inserisco il dielettrico e per capire che succede mi devo ricordare come si comporta un materiale del genere quando viene posto in una regione sede di un campo elettrico: le sue molecole si polarizzano cercando di annullare il campo esterno. Un po' come fanno i conduttori, ma non avendo elettroni completamente liberi è meno efficiente e non riesce ad annullare completamente il campo al suo interno, ma solo a diminuirlo di un fattore ε_r. Inoltre come per le lastre del condensatore possiamo considerare le due superfici polarizzate del blocchetto come due piani infiniti. Applicando Gauss troviamo che il loro contributo al campo totale è diverso da zero solo nella regione di spazio che sta fra loro, mentre il contributo è nullo fuori dal dielettrico.
In questo modo abbiamo suddiviso lo spazio dentro il condensatore in 3 regioni: quella superiore e quella inferiore in cui conosciamo già quanto vale il campo elettrico perché non cambia rispetto al caso del condensatore ancora vuoto e la regione dentro il dielettrico in cui il campo quindi vale:

$$E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Conoscendo il valore del campo elettrico lungo tutto il percorso fra le due lastre, possiamo usare ancora la definizione di differenza di potenziale:

$$\Delta V = E_1\frac{d}{2} + E_2 d + E_3\frac{d}{2} = \frac{Q}{A}\frac{1}{\varepsilon_0}\left(d + \frac{d}{\varepsilon_r}\right)$$

da qui otteniamo per la capacità:

$$C_F = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 A\varepsilon_r}{d(\varepsilon_r + 1)}$$

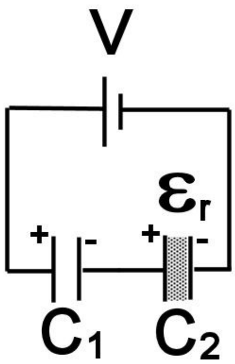
Che da una da un'energia finale:

$$U_F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_F} = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A}\frac{(\varepsilon_r + 1)}{2\varepsilon_r} = U_0\frac{(\varepsilon_r + 1)}{2\varepsilon_r}$$

Ricordando che ε_r è sempre maggiore di 1, possiamo vedere 2 casi limite: se sostituiamo $\varepsilon_r = 1$ nell'espressione sopra otteniamo $U_F = U_0$ cioè sarebbe come non aver inserito niente. Se nell'altro limite ε_r è molto grande o meglio tende ad un valore infinito si ottiene una $U_F = \frac{1}{2}U_0$. In effetti quest'ultimo caso equivale ad inserire un conduttore e questo trasforma il condensatore iniziale in due condensatori in serie con distanze fra le armature uguali a $\frac{d}{2}$.

Esercizio 2

Due condensatori hanno la stessa area delle armature $A=4*10^{-4}$ m^2, la distanza fra le lastre del primo è $d_1=10^{-3}$m. Il secondo è riempito con dielettrico di $\varepsilon_r = 3.2$ e rigidità dielettrica $\alpha=10^6$volts/m. Se collego i due condensatori in serie, calcolare la distanza minima fra le armature del secondo condensatore in modo che il sistema possa sopportare una differenza di potenziale di 10^4 V senza che si distrugga il dielettrico. Calcolare inoltre l'energia immagazzinata nel sistema in questa condizione.



Soluzione

La rigidità dielettrica di un materiale è il massimo campo che può sopportare prima che si generino scariche elettriche con la sua conseguente distruzione. Per risolvere il problema possiamo ad esempio trovare il campo a cui è sottoposto il secondo condensatore in funzione della distanza fra le sue armature, porlo uguale alla rigidità dielettrica ed invertire la formula per ritrovare tale distanza.

Partiamo con la capacità dei due condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_E}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d_1}{\varepsilon_0 A}+\frac{d_2}{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}=\frac{1}{\varepsilon_0 A}\left(d_1+\frac{d_2}{\varepsilon_r}\right)=\frac{\varepsilon_r d_1+d_2}{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}\Rightarrow C_E=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}{\varepsilon_r d_1+d_2}$$

Ora osserviamo che la carica sulle armature del primo condensatore sarà uguale a quella sul secondo ed essa si può esprimere in funzione della capacità della serie e della differenza di potenziale totale:

$$C_E=\frac{Q}{V}\Rightarrow Q=C_E V$$

Il campo all'interno del secondo condensatore si può trovare applicando il teorema di Gauss con il solito cilindro perpendicolare ad una delle due armature, facendo attenzione che ora all'interno del condensatore non abbiamo il vuoto ma un dielettrico, quindi bisogna sostituire ε_0 con $\varepsilon_0\varepsilon_r$:

$$E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{C_E V}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{V}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{\varepsilon_r d_1+d_2}=\frac{V}{\varepsilon_r d_1+d_2}$$

Questo è il campo presente nel secondo condensatore e dobbiamo fare in modo che sia inferiore alla sua rigidità dielettrica:

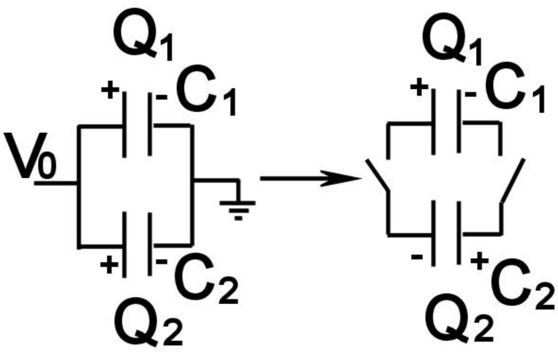
$$E_2<\alpha\Rightarrow\frac{V}{\varepsilon_r d_1+d_2}<\alpha\Rightarrow\frac{V}{\alpha}<\varepsilon_r d_1+d_2\Rightarrow d_2>\frac{V}{\alpha}-\varepsilon_r d_1$$

Nel caso d_2 abbia il valore limite trovato ora, l'energia immagazzinata risulta:

$$U = \frac{1}{2} C_E V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{\varepsilon_r d_1 + \frac{V}{\alpha} - \varepsilon_r d_1} V^2 = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A \alpha V}{2}$$

Esercizio 3

Due condensatori di capacità C_1 e C_2 vengono caricati con al stessa differenza di potenziale V_0. Una volta carichi sono scollegati dalla ddp e collegati fra loro in modo da invertire le polarità. Calcolare la carica finale sulle loro armature e l'energia iniziale e finale del sistema.



Soluzione

Quando carico i due condensatori su ognuno va una certa carica in base alla sua capacità:

$$Q_1 = C_1 V_0$$
$$Q_2 = C_2 V_0$$

Quindi l'energia totale del sistema è:

$$U_0 = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V_0^2$$

Ora stacco i condensatori, quindi la carica totale presente sul mio sistema non può più cambiare. Collegandoli con le polarità rovesciate, si avrà una ridistribuzione della carica. Se chiamiamo Q_T la carica complessiva presente su un lato comune dei condensatori, V_F il potenziale finale comune a cui giungono e Q_{1F} e Q_{2F} le cariche finali su ciascun lato dei condensatori, possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} Q_T = Q_1 - Q_2 \\ V_F = \dfrac{Q_{1F}}{C_1} = \dfrac{Q_{2F}}{C_2} \\ Q_{1F} + Q_{2F} = Q_T \end{cases}$$

risolvendo il sistema si ottiene:

$$Q_{1F} = \frac{(Q_1 - Q_2)C_1}{C_1 + C_2} \qquad Q_{2F} = \frac{(Q_1 - Q_2)C_2}{C_1 + C_2}$$

ed un'energia:

$$U_F = \frac{1}{2}\frac{Q_{1F}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2F}^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{(Q_1 - Q_2)^2 C_1}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{1}{2}\frac{(Q_1 - Q_2)^2 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2}\frac{(Q_1 - Q_2)^2 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)^2} =$$

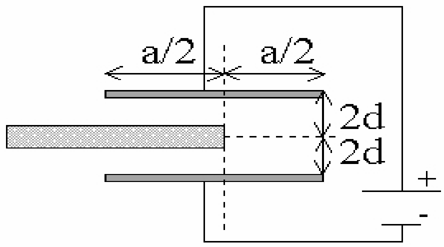
$$= \frac{1}{2}\frac{(C_1 V_0 - C_2 V_0)^2 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2}\frac{(C_1 - C_2)^2 V_0^{\,2}}{(C_1 + C_2)}$$

Quindi si ha un'energia finale diversa da zero solo se le due capacità sono diverse da loro. In effetti se prendo due condensatori uguali, li carico con la stessa ddp e poi li collego al rovescio loro hanno esattamente la stessa carica sulle armature ma messa con il segno opposto; al momento del contatto essa si ridistribuisce e tutto torna come se non li avessi caricati.

Da notare che l'energia finale è minore di quella iniziale. In effetti noi ci stiamo occupando solo dello stato iniziale e finale e non di come ci si arriva. Comunque l'energia che manca se ne è andata per effetti dissipativi come il calore formato per effetto Joule durante il passaggio di carica da un condensatore all'altro.

Esercizio 4 (dall'appello 16/7/04 B)

1) Un condensatore piano è costituito da due armature quadrate di lato a separate da una distanza 4d. Il condensatore viene completamente caricato alla tensione V_0 tramite una batteria e resta collegato a quest'ultima. Una lastra conduttrice quadrata di lato a e spessore pari al 25% della distanza tra le armature è inserita centralmente tra le armature a metà strada del condensatore (vedi figura). Si determini dopo l'inserimento della lastra nel condensatore:
   a) la sua capacità;
   b) l'energia immagazzinata al suo interno (Attenzione: il condensatore è sempre collegato alla batteria).



Soluzione

Inizialmente la capacità del condensatore vale:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{4d}$$

Inserisco la lastra tenendo la batteria collegata, questo vuol dire che il suo potenziale non cambia ma ci sarà uno spostamento di cariche. Alla fine ottengo una regione di spazio nella quale per spostarmi dall'armatura a potenziale negativo a quella a potenziale positivo, posso scegliere fra due percorsi: quello che passa attraverso la lastra di metallo e quello che passa nel vuoto. Questo vuol dire che ho a che fare con due condensatori in parallelo. Calcoliamo le capacità di entrambi. Per quello contenente solo il vuoto si applica direttamente la formula classica della capacità, stando attenti a considerare la superficie giusta, cioè $a * \frac{a}{2}$ (se vi resta difficile vedere questa superficie provate a disegnare il sistema del condensatore con la lastra infilata fino a metà lato, visti dall'alto: le armature diventano dei quadrati di lato a …) :

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{2}\frac{1}{4d} = \varepsilon_0 \frac{a^2}{8d}$$

Per calcolare la capacità dell'altra metà contenente il metallo si può usare il metodo di esprimere il potenziale in funzione del campo elettrico e quest'ultimo in funzione della carica. Intanto calcoliamo il campo elettrico nelle diverse regioni all'interno dei questa zona: applicando il teorema di Gauss su un cilindro con asse perpendicolare alla lastra superiore del condensatore e superfici ai due lati di questo, si trova:

$$S_1 E_1 = S_1 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Questo campo è lo stesso sia nella parte di spazio sopra la lastra di metallo inserita nel condensatore che in quella sotto. All'interno della lastra il campo è nullo perché appunto si tratta di un metallo.
Ora dalla definizione di potenziale si può scrivere:

$$\Delta V = \int E dx = E_1\left(2d - \frac{d}{2}\right) + 0 + E_1\left(2d - \frac{d}{2}\right) = 3E_1 d = 3\frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = 3\frac{q_1 d}{\frac{a}{2} a\varepsilon_0} = \frac{6q_1 d}{a^2\varepsilon_0}$$

quindi la capacità di questo condensatore sarà:

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V} = \frac{a^2\varepsilon_0}{6d}$$

Alla fine la capacità risultante sarà:

$$C_E = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{6d} + \frac{\varepsilon_0 a^2}{8d} = \frac{7}{24}\frac{\varepsilon_0 a^2}{d}$$

mentre la sua energia sarà:

$$U_F = \frac{1}{2} C_E V_0^2 = \frac{7}{48}\frac{\varepsilon_0 a^2}{d} V_0^2$$

In questo caso essendo la capacità finale maggiore, anche l'energia finale del sistema è maggiore.