- Radioattività -

- 1 -

Un preparato radioattivo ha un'attività A_0 = 148 · 10^4 dis / s. A quanti μCi (microcurie) si riduce l'attività del preparato dopo due tempi di dimezzamento?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Sapendo che:

$$1\ Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ dis / s$$

e che un microcurie è:

$1\ \mu C = 1 \cdot 10^{-6}\ C = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} = 3{,}7 \cdot 10^{4}$ dis / s

$$1\,\text{dis/s} = \frac{1}{3.7 \cdot 10^4}\,\mu C$$

e quindi:

$$A_0 = 148 \cdot 10^4 \frac{1}{3{,}7 \cdot 10^4} = 40\,\mu Ci$$

dalla formula del decadimento radioattivo, $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$

sapendo che t = 2 T e che $\lambda = \ln 2 / T$, si ha che:

$$e^{-\lambda t} = e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot 2T} = e^{-\ln 2 \cdot 2} = e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}$$

Dalla quale si ottiene :

$$A(2T) = A0 / 4 = 40 / 4\ \mu C$$

$$A(2T) = 10\ \mu C$$

Si poteva giungere allo stesso risultato, anche, semplicemente pensando che, per definizione, dopo un tempo di dimezzamento, l'attività si riduce della metà; quindi dopo 2 tempi di dimezzamento, l'attività si sarà ridotta due volte della metà:

- dopo un tempo di dimezzamento, si ha: A_{1T} = (40 / 2) μC = 20 μC
- dopo due tempi di dimezzamento, si ha: A_{2T} = (20 / 2) μC = 10 μC

- 2 -

Il ^{14}C contenuto nella materia vivente determina, in condizioni di equilibrio col CO_2 atmosferico, un'attività di 16 dis / min per ogni grammo di carbonio naturale in essa contenuto.
Determinare l'età di resti vegetali che hanno un'attività di 4 dis / min per grammo di carbonio.
[Tempo di dimezzamento del ^{14}C: T = 5600 anni]

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Considerando la legge del decadimento radioattivo,

$$N(t)=N(0)\,e^{-\lambda t}$$

e l'attività

$$A(t)=\left|\frac{dN(t)}{dt}\right|=N(t)\lambda=N(0)\lambda e^{-\lambda t}=A(0)e^{-\lambda t}$$

A(t)=4 dis/min
A(0)=16 dis/min

Per cui

$$\frac{A(t)}{A(0)}=\frac{4}{16}=e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad 1)\quad \frac{1}{4}=e^{-\lambda t}$$

Prendendo i logaritmi di entrambi i membri dell'ultima equazione: $\ln 1 - \ln 4 = -\lambda t$

Dalla quale: $-\ln 4 = -\lambda t$

inoltre:

$$\lambda = \ln 2/T, \qquad \lambda = \ln 2/5600\ \text{anni}^{-1} \approx 1{,}24 \cdot 10^{-4}\ \text{anni}^{-1}$$

da cui:

$$-\ln 4 = -\lambda t$$

quindi:

$$t = \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{2\ \ln 2}{\dfrac{\ln 2}{5600\ \text{anni}}} = 2 \cdot 5600\ \text{anni} = 11200\ \text{anni}$$

<u>N.B.</u> Si poteva giungere allo stesso risultato per una via meno rigorosa: era sufficiente notare che dimezzando due volte le 16 dis/min iniziali, si ottenevano proprio le 4 dis/min finali. Sapendo che T, il periodo di dimezzamento, è il tempo necessario affinchè l'attività di una sostanza radioattiva si dimezzi, ed essendosi, in questo caso, dimezzata due volte, il tempo richiesto altro non è che il doppio del periodo di dimezzamento:

$$t = 2 \cdot T = 2 \cdot 5600\ \text{anni} \Rightarrow t = 11200\ \text{anni}$$

Sapendo che il periodo di dimezzamento del Polonio 210 è 138 giorni, calcolare l'attività espressa in curie di un grammo di elemento. Si ricordi la definizione di velocità di decadimento, detta anche attività.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per la legge del decadimento radioattivo: $$A(t) = \left|\frac{dN(t)}{dt}\right| = N(t)\lambda = N(0)\lambda e^{-\lambda t} = A(0)e^{-\lambda t}$$

dove :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

in cui T è il periodo di dimezzamento:

$$138 \text{ giorni} = 138 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \approx 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ s}$$

e quindi:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{1{,}2 \cdot 10^7 \text{ s}} \approx 5{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

se N è il numero di Avogadro, N = 6,022· · 10^{23} molecole per mole di sostanza (210 g), il numero di molecole presenti in un grammo di Polonio 210 è:

$$N_{1g} = \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{210} \approx 2{,}87 \cdot 10^{21} \text{ molecole.}$$

Allora da:

$$A(0) = \lambda N(0)$$

si ha:

$$A_{1\,g} = 5{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}87 \cdot 10^{21} \text{ dis/s} = 1{,}66 \cdot 10^{14} \text{ dis/s}$$

e poichè 1 curie è:

$$1 \text{ Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ dis/s,}$$

Per avere l'attività in curie:

$$A(0) = \frac{1{,}66 \cdot 10^{14}}{3{,}7 \cdot 10^{10}} \approx 4{,}4 \cdot 10^3 \text{ Ci}$$

- 4 -

Un preparato radioattivo posto vicino ad un contatore Geiger registra 400 impulsi al minuto. Ripetendo la stessa misura dopo 8 giorni, il numero d'impulsi si è ridotto a 100 al minuto. Calcolare il periodo di dimezzamento e la costante di disintegrazione del preparato.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla legge del decadimento radioattivo, l'attività è data da :

$$A(t) = \left|\frac{dN(t)}{dt}\right| = N(t)\lambda = N(0)\lambda e^{-\lambda t} = A(0)e^{-\lambda t}$$

e sapendo che:

$A(t) =$ 100 impulsi al minuto,
$A(0) =$ 400 impulsi al minuto,
$t =$ 8 giorni,

si può scrivere:

$$100 = 400\, e^{-8\lambda} \Rightarrow \frac{100}{400} = e^{-8\lambda} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-8\lambda}$$

che, grazie alle proprietà dei logaritmi, diventa:

$$\ln\frac{1}{4} = -8\lambda \Rightarrow -\ln 4 = -8\lambda \Rightarrow \ln 4 = 8\lambda$$

e quindi:

$$\lambda = \frac{2\ln 2}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{4} = \frac{0,693}{4} \approx 1,7 \cdot 10^{-1} \text{ giorni}^{-1}$$

Trovato λ, si risale facilmente al periodo di dimezzamento, T:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\frac{\ln 2}{4}} \text{ giorni} \Rightarrow T = 4 \text{ giorni}$$

<u>N.B.</u> Allo stesso risultato si poteva ginungere anche notando che se in 8 giorni l'attività si riduceva ad un quarto, essa si dimezzava due volte. Il tempo necessario affinchè ciò avvenisse, altro non è che due volte il periodo di dimezzamento: allora, se 8 giorni = 2 T, è immediato che T = 4 giorni. Per la costante di disintegrazione, λ, dalla sua definizione:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{4 \text{ giorni}} \Rightarrow \lambda \approx 1,7 \cdot 10^{-1} \text{ giorni}^{-1}$$

- 5 -

Se un elemento radioattivo X ha tempo di dimezzamento doppio di quello di un altro elemento Y, la probabilità P_X

che un atomo di X si disintegri è maggiore o minore dell'analoga probabilità P_Y, di disintegrazione di Y? Quanto vale il rapporto P_A / P_B?
Dopo un tempo T_X qual'è il rapporto N_X / N_Y degli atomi residui supponendo che inizialmente i due campioni contenessero lo stesso numero di atomi N_0 ?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se l'elemento radioattivo X ha un tempo di dimezzamento, T_X, doppio di quello dell'elemento Y, cioè: $T_X = 2\ T_Y$, significa che, se entrambi gli elementi partono con lo stesso numero di atomi, $N_{0A} = N_{0B} = N_0$, dopo un tempo T_X, si potranno contare in X, $N_0/2$ atomi non ancora decaduti e in Y, $N_0/4$, dato che Y si è dimezzato 2 volte. Quindi, in un certo istante, è più probabile che si disintegri un atomo di Y che uno di X, da cui la risposta alla prima domanda è:

$$\text{prob X} < \text{prob Y}$$

Per rispondere alla terza, basta ricorrere a quanto osservato poc'anzi:
dopo un tempo T_X si ha:

$$N_X = \frac{N_0}{2} \text{ numero di atomi r. non ancora decaduti per x}$$

mentre:

$$N_Y = \frac{N_0}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_X}{N_Y} = \frac{\frac{N_0}{2}}{\frac{N_0}{4}} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{4}{N_0} = 2 \Rightarrow N_x = 2\ N_y$$

Ciò significa che il numero di atomi r. sopravvissuti di X è il doppio di quello di Y; quindi per ogni atomo r. di X che decade, ne decadono 2 di y: la probabilità di "veder" decadere un atomo r. di B è doppia di quella di "vederne" decadere uno di A.
Per cui:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{1}{2}$$

che è la risposta alla seconda domanda.

- 6 -fuorviante

Una quantità pari ad 1 g di Ra^{226} si trova in equilibrio con i suoi prodotti di decadimento. Calcolare il numero di nuclei che si disintegrano in 2 secondi ed il valore dell'attività in curie.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla definizione di curie, che rappresenta l'attività di un g di Ra^{226} nel quale, si disintegrano $3{,}7 \cdot 10^{10}$ nuclei in un secondo, discende che 1 g di Ra^{226} ha l'attività di 1 Ci, o di $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq,

dato che 1 Bq = 1 dis/s.
Quindi in due secondi si disintegreranno:

$$2 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10} = 7{,}4 \cdot 10^{10} \text{ nuclei di } Ra^{226}$$

ma l'attività di 2 g di Ra^{226} rimane sempre:

$$3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} = 2 \text{ curie.}$$

- 7 -

Scrivere la legge del decadimento radioattivo ed illustrare la relazione esistente fra la costante di disintegrazione λ, il tempo di dimezzamento T e la vita media τ, spiegando anche il significato di queste grandezze.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

La legge del decadimento radioattivo è:

$$N(t)= N_0\, e^{-\lambda t}$$

dove:

$N(t)$ è il numero di atomi presenti (cioè non ancora decaduti) all'istante t;

N_0 è il numero di atomi presenti all'istante iniziale (t = 0).

Le relazioni tra λ, T e τ sono:

$$\lambda T = \ln 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} \qquad \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}$$

T è il tempo necessario affinchè il numero di nuclei iniziali (N_0) si riduca a $N_0/2$, cioè il tempo necessario affinchè decadano la metà dei nuclei iniziali, in altre parole $N(T)=N_0/2$.

τ è il tempo necessario affinchè il numero dei nuclei iniziali diventi N_0 / e, cioè il numero dei nuclei non ancora decaduti dopo un tempo t, $N(\tau)= 0{,}368\ N_0$.

λ è una costante di proporzionalità caratteristica di ogni sostanza, ha le dimensioni di $[t]^{-1}$.

- 8 -

Sapendo che il periodo di dimezzamento del Ra^{226} è 1622 anni, calcolare la costante di disintegrazione, la vita media e l'attività di un g di Ra^{226} espressa sia in disintegrazioni al secondo che in curie.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Siccome per definizione un curie (Ci) rappresenta il numero di disintegrazioni al secondo di un grammo di Ra^{226}, cioè 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ dis/s (o Bq).
Se T = 1622 anni, sarà:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \approx \frac{0{,}693}{1622} \Rightarrow \lambda \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{anni}^{-1}$$

e:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4{,}3 \cdot 10^{-4}}\,\text{anni} \Rightarrow \tau \approx 2{,}3 \cdot 10^{3}\ \text{anni}$$

infine, l'attività è, come accennato, 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ dis/s (o Bq), per ogni grammo di Ra^{226}.

- 9 -

Uno scavo tombale fornisce un'opera lignea che dà 11,6 conteggi al minuto per grammo di carbonio presente. Il conteggio corrispondente dal legno di un albero vivente è 15,3. Quanti anni fa è stata eseguita l'opera? [Il tempo di dimezzamento del ^{14}C è di 5600 anni].

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Conoscendo l'attività iniziale, A_0, che è 15,3 conteggi al minuto, quella attuale, A(t), che è 11,6 conteggi al minuto, ed il tempo di dimezzamento del carbonio, T = 5600 anni, l'età del reperto, t, si può ricavare dalla legge del decadimento radioattivo:

$$A(t) = A_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln \frac{A(t)}{A(0)} = -\lambda t$$

da cui, essendo:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

si ha:

$$\ln \frac{A(t)}{A_0} = -\frac{\ln 2}{T}\, t$$

e quindi:

$$t = -\ln \frac{A(t)}{A_0} \cdot \frac{T}{\ln 2} = -\ln \frac{11,6}{15,3} \cdot \frac{5600}{\ln 2} = -\left(-0,277\right) \cdot \frac{5600}{\ln 2} \Rightarrow t \approx 2238 \text{ anni}$$

- 10 -

In un campione di roccia il rapporto di peso fra ^{238}U e ^{206}Pb è 1 : 0,75. Valutare l'età della roccia supponendo che tutto il ^{206}Pb deriva dal decadimento dell' ^{238}U.
[Il tempo di dimezzamento del ^{238}U è di $4,5 \cdot 10^9$ anni].

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poiché tutto il ^{206}Pb deriva dal decadimento dell' ^{238}U, al tempo t = 0, evidentemente, c'era solamente ^{238}U. Allora, in ogni istante t, vale la formula:

Ma sapendo che:

$$\frac{N^U(t)}{N^{Pb}(t)} = \frac{1}{0.75}$$

dove $N^U(t)$ sono gli atomi di ^{238}U sopravvissuti dopo il tempo t, mentre $N^{PB}(t)$ indica in numero di quelli di ^{206}Pb venutisi a generare dal decadimento dell'^{238}U,

e quindi:

$$\frac{N^U(t)}{N^{Pb}(t)} = \frac{N^U(t)}{N_0^U - N^U(t)} = \frac{1}{0,75}$$

$$0,75\, N^U(t) = N_0^U - N^U(t) \Rightarrow \left(0,75 + 1\right) N^U(t) = N_0^U \Rightarrow N^U(t) = \frac{1}{1,75} N_0^U$$

Dalla legge del decadimento radioattivo: $N(t)=N(0)e^{-\lambda t}$ e ricordando la definizione di λ: $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

Otteniamo:

quindi:

$$\boxed{\frac{N(t)}{N_0} = \frac{N^U(t)}{N_0^U} = \frac{1}{1,75} = e^{-\lambda t} \Rightarrow -\ln 1,75 = -\lambda\, t = -\frac{\ln 2}{T}}$$

$$t = T\frac{\ln 1,75}{\ln 2} = 4,5 \cdot 10^9 \cdot \frac{0,56}{0,693} \Rightarrow t \approx 3,6 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

- 11 -

La velocità di decadimento di un certo campione radioattivo era di 250 $N \cdot s^{-1}$ al tempo t = 0 e 175 $N \cdot s^{-1}$ al tempo t' = 2 h. Qual'è il tempo di dimezzamento del radionuclide campione?

——— ∗ ——— *SOLUZIONE* ——— ∗ ———

Il numero dei nuclei sopravvissuti e la velocità di decadimento (attività) sono legati dalle equazioni:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

e

$$A(t) = \lambda N(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = A(0)e^{-\lambda t}$$

$A(0) = N_0\lambda = 250$ dis / s   al tempo   t =2h $A(t) = 175$ dis / s

Dalla relazione $\boxed{\frac{A(t)}{A(0)} = e^{-\lambda t}}$ $\boxed{\Rightarrow \ln\frac{A(t)}{A_0} = -\lambda t \Rightarrow \ln\frac{175}{250} = -2\lambda \Rightarrow \ln 0,7 = -2\lambda}$

Dalla quale si ottiene:

$$\lambda = \frac{0,36}{2} \approx 1,8 \cdot 10^{-1} \text{ h}^{-1}$$

Il tempo di dimezzamento, T, è dato dalla:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad T = \frac{\ln 2}{1,8 \cdot 10^{-1}} \approx 3,85 \text{ ore}$$

- 12 -

Quanti decadimenti al secondo ci sono in una mole di fosforo ^{32}P? A quanti curie corrisponde un grammo di fosforo ^{32}P? (Tempo di dimezzamento del ^{32}P: T = 14,3 giorni)

——— ∗ ——— *SOLUZIONE* ——— ∗ ———

L'attività si ricava dall'equazione:

$$A(t) = \lambda N(t)$$

nella quale:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Sapendo che, per definizione, una mole di una qualunque sostanza, è una quantità, espressa in grammi, pari al peso molecolare di tale sostanza e che contiene un numero di molecole pari al numero di Avogadro ($N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$), se $T = 14{,}3$ giorni $= 14{,}3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s$= 1235520$ s, l'attività di una mole di ^{32}P è:

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} N = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{\ln 2}{1235520} = 3{,}37 \cdot 10^{17} \text{ dis s}^{-1}$$

Siccome 1 Ci $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ dis s^{-1}, per avere l'attività in curie, basta fare il seguente rapporto:

$$A_0 = \frac{3{,}37 \cdot 10^{17}}{3{,}7 \cdot 10^{10}} = 9{,}1 \cdot 10^6 \text{ Ci}$$

E questa è l'attività di una mole di ^{32}P cioèl'attivita di 32 g di fosforo. Per avere quella di un solo grammo di ^{32}P è sufficiente dividere l'attività di una mole per il peso molecolare: 32. In questo caso:

$$A_{01g} = \frac{9{,}1 \cdot 10^6}{32} = 2{,}85 \cdot 10^5 \text{ Ci}$$

- 13 -

Una sorgente radioattiva ha un periodo di dimezzamento di 1 min (cioè: T = 1 min). All'istante t = 0 essa viene posta vicino ad un rivelatore, e si misura una frequenza di conteggio di 2000 eventi / s (Bq). Si trovino la costante di decadimento λ e le frequenze di conteggio R_1, R_2, R_3, R_{10} negli istanti t = 1 min, 2 min, 3 min, e 10 min.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se T = 1 min, si può trovare subito il valore della costante di decadimento dato dalla relazione:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{1} \Rightarrow \lambda = 0{,}693 \text{ min}^{-1} \approx 0{,}012 \text{ s}^{-1}$$

R_1: t = 1 min. Siccome è esattamente un tempo di dimezzamento, si ha che il conteggio sarà la metà di quello al tempo t = 0:

$$R_1 = \frac{R_0}{2} = \frac{2000}{2} \Rightarrow R_1 = 1000 \text{ dis s}^{-1}$$

R_2: t = 2 min. Siccome si hanno tempi di dimezzamento esatti, si può usare la formula:

$$R_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0$$

Quindi ripetendo il caso di R_1 e calcolando R_2, R_3 ed R_{10}, si ha:

$$R_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 R_0 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2000 = 1000 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 R_0 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2000 = 500 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

$$R_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 R_0 = \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 2000 = 250 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

....

$$R_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} R_0 = \left(\frac{1}{1024}\right) \cdot 2000 \approx 1{,}95 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

- 14 -

Il carbonio-14, ^{14}C, ha un tempo di dimezzamento T = 5730 anni. Si calcoli l'attività di 1 mg di questo elemento radioattivo sia in Bq che in mCi.

——— * ——— SOLUZIONE ——— * ———

Il tempo di dimezzamento, T, espresso in secondi risulta:

$$T = 5730 \text{ anni} = 5730 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \Rightarrow T = 1{,}8 \cdot 10^{11} \text{ s}$$

avendo T, la costante di disintegrazione, λ, è data, per definizione:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{0{,}693}{1{,}8 \cdot 10^{11}} = 3{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Poiché, per definizione, in una mole di ^{14}C, che pesa 14 g, ci sono N_A atomi ($N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$, numero di Avogadro), per sapere quanti nuclei se ne trovano in un mg (e ricordando che è 1 g = 10^3 mg):

$$N_{1g} = \frac{N_A}{14} \Rightarrow N_{1mg} = \frac{6{,}023 \cdot 10^{23}}{14} 10^{-3} = 4{,}3 \cdot 10^{19} \text{ atomi}$$

L'attività non è altro che la velocità di decadimento (numero di disintegrazioni al secondo).
Tenendo conto della formula:

$$A_0(1 \text{ mg}) = \lambda N_{1mg}$$

si ha:

$$A_0(1 \text{ mg}) = 3{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} \cdot 4{,}3 \cdot 10^{19} \text{ atomi} = 1{,}6 \cdot 10^8 \text{ dis s}^{-1}$$

e dato che 1 Bq è definito come 1 dis s^{-1}, risulta che l'attività di un mg di ^{14}C è $1{,}6 \cdot 10^8$ Bq.
Poichè:

$$1 \text{ Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

e

$$1 \text{ mCi} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Ci} = 3{,}7 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

si ha che:

$$1 \text{ Bq} = \frac{1}{3{,}7 \cdot 10^7} = 2{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ mCi}$$

infine:

$$1{,}6 \cdot 10^8 \text{ Bq} = 1{,}6 \cdot 10^8 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-8} = 4{,}3 \text{ mCi}$$

e quest'ultimo valore rappresenta l'attività di un mg di ^{14}C espressa in mCi.

- 15 -

Una soluzione contenente radiofosforo ^{32}P, che è un nucleo β^- emittente con un periodo di dimezzamento T = 14 giorni, circonda un contatore Geiger che registra 10^3 conteggi al minuto. Se la stessa misura fosse eseguita 30 giorni più tardi, stimare la nuova velocità di conteggio.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

T = 14 gg, ⇒ T = 14 · 24 · 60 = 20160 min
t = 30 gg, ⇒ t = 30 · 24 · 60 = 43200 min

$A_0 = 10^3$ dis min^{-1}

$$\boxed{A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}}$$

Dalla definizione di λ

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{20160} = 3{,}44 \cdot 10^{-5}\ \text{min}^{-1} \qquad \lambda t = 3.44 \cdot 10^{-5} \cdot 43200 = -1{,}49$$

$$A(43200) = 10^3\, e^{-1{,}49} \approx 0{,}23 \cdot 10^3 \text{ conteggi al minuto}$$

- 16 -

Una radiosorgente β^- emettitrice da 15 Ci, si trova a 3 m dalla vostra mano (di superficie diciamo 100 cm^2). Supponendo che gli elettroni vengano emessi in modo uniforme in tutte le direzioni, quanti elettroni attraversano la mano ogni secondo?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dato che 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ dis / s, l'attività di questa radiosorgente β^-, che è di 15 Ci, in dis / s, risulta di:

$$15 \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ dis / s} \approx 5{,}6 \cdot 10^{11} \text{ dis / s.}$$

Ogni secondo $5.6 \cdot 10^{11}$ elettroni vengono emessi. Se l'emissione avviene in modo isotropo, considerando una superficie sferica di raggio R che gli elettroni attraversano : all'aumentare del raggio della sfera il numero di elettroni che arrivano per unità di superficie e di tempo è proporzionale al numero di elettroni emessi al secondo diviso la superficie della sfera di raggio R .

$$\boxed{\frac{\text{Numero di elettroni emessi per unita' di tempo dalla sorgente}}{\text{Superficie della sfera}}}$$

La mano è a 3 m dalla sorgente, essa verrà investita solo da una frazione del numero totale di elettroni che arrivano sulla sfera di raggio 3 m.
Per cui

$$S_{sfera} = 4\,\pi\, R^2 = 4\,\pi\, 9\ m^2 \Rightarrow S_{sfera} = 36\,\pi \approx 113{,}1\ m^2$$

La densita' degli elettroni che attraversano per unita' di tempo da una superficie di tale raggio e' data da :

$$\frac{5.6 \cdot 10^{11}}{113.1} \text{ elettroni } m^{-2} s^{-1}$$

Per gli elettroni che al secondo attraversano una superficie di 100 cm^2 posta ad una distanza R dal punto incui avviene l'emissione otteniamo

$$\text{Numero di elettroni che attraversano la mano al secondo} = 5{,}6 \cdot 10^{11} s^{-1} \frac{1 \cdot 10^{-2}\ m^2}{113{,}1\, m^2} = 4{,}9 \cdot 10^7 s^{-1}$$

E quindi gli elettroni che attraversano ogni secondo una superficie di 100 cm^2 = 0,01 m^2, cioè quella della mano, alla distanza di 3 m dalla sorgente sono $4{,}9 \cdot 10^7$.

- 17 -

La dose massima ammessa per i ricercatori che operano in ambienti ove è presente la radiazione γ è di $6{,}25 \cdot 10^{-3}$ roentgen per ora (R / h). Valutare la distanza di sicurezza da una sorgente di ^{60}C, la quale possiede una emissione radioattiva di 27 R / h alla distanza di 1 metro. Se la sorgente viene utilizzata in un contenitore di piombo che riduce l'emissione γ all'1%, fino a quale distanza si possono avvicinare i ricercatori?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Una sorgente γ emette una radiazion che si distribuisce uniformemente nello spazio come sulla superficie di una sfera centrata nella sorgente stessa per cui l'intensità della radiazione per unità di superficie diminuisce man mano che il raggio della sfera – cioe' la distanza dalla sorgente aumenta. Tale intensità di emissione radioattiva risulta inversamente proporzionale al quadrato della distanza (dalla sorgente).
Cio' vuol dire che la dose ad una distanza R dalla sorgente e' proporzionale a $1/R^2$.
Allora il rapporto tra i quadrati delle distanze, x e 1m, è inversamente proporzionale a quello tra le due emissioni, E_x ed E_1, corrispondenti

$$\frac{E_x}{E_1} = \frac{(1\,m)^2}{(x\,m)^2} = \frac{6{,}25 \cdot 10^{-3}\ \frac{R}{h}}{27\ \frac{R}{h}} \Rightarrow x^2 = \frac{27}{6{,}25 \cdot 10^{-3}} = 4{,}32 \cdot 10^3\ m^2 \Rightarrow x = 65.37\ m$$

e quindi la distanza di sicurezza dalla sorgente e' pari a 65,7 m dalla sorgente.

In presenza di uno schermo che riduce all'1 % l'emissione, bisogna trovare, come prima, la distanza alla quale la radiazione γ si è ridotta a $6{,}25 \cdot 10^{-3}$ roentgen per ora (R/h), con la differenza che, ora, essendoci il filtro, l'emissione della sorgente è da considerare come l' 1 % dei 27 R/h dati:

$$E_S = 27 \cdot \frac{1}{100} \frac{R}{h} \Rightarrow E_S = 2{,}7 \cdot 10^{-1} \frac{R}{h}$$

e rifacendo gli stessi calcoli di prima con quest'ultimo valore, si ha:

$$\frac{E_S}{E_1} = \frac{(1\ m)^2}{(x_S\ m)^2} = \frac{6,25 \cdot 10^{-3}\ \frac{R}{h}}{2,7 \cdot 10^{-1}\ \frac{R}{h}} \Rightarrow x_S^2 = \frac{2,7 \cdot 10^{-1}}{6,25 \cdot 10^{-3}} = 4,32 \cdot 10^1 = 43,2\ m^2$$

e quindi:

$$x_S = \sqrt{43{,}2} \approx 6{,}57\ m$$

- 18 -

Una certa sostanza radioattiva ha tempo di dimezzamento pari a 200 giorni. Trovare dopo quanto tempo il numero di atomi di questa sostanza si è ridotto al 25 % di quello iniziale.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla definizione di λ,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{0,693}{200} \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ giorni}^{-1}$$

Tenendo presente che è:

$$N_t = 25\,\%\, N_0 = \frac{N_0}{4}$$

e dalla formula del decadimento radioattivo:

$$N_t = N_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_0}{4} = N_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\lambda t}$$

passando ai logarirmi:

$$\ln 1 - \ln 4 = -\lambda t \Rightarrow \ln 4 = \lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{2 \ln 2}{\frac{\ln 2}{T}} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} T$$

da cui:

$$t = 2\,T = 2 \cdot 200 \Rightarrow t = 400 \text{ giorni}$$

[N.B. per le proprietà dei logaritmi si ha che: $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$]
Si poteva giungere allo stesso risultato anche considerando il fatto che ogni volta che passa un tempo di dimezzamento la sostanza dimezza il numero dei suoi atomi: da N_0 si passa a N_0 / 2, cioè a 50 % N_0 e, quindi, dopo un altro tempo di dimezzamento, si passerà da N_0 / 2 a N_0 / 4, cioè a 25 % N_0. Quindi due tempi di dimezzamento sono proprio 200 · 2 = 400 giorni.
Un terzo metodo, poiché il tempo richiesto è esattamente un multiplo del tempo di dimezzamento, era quello di applicare la seguente formula:

$$N_{nT} = \left(\frac{1}{2}\right)^n N_0$$

che in questo esercizio dà:

$$\frac{N_0}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^n N_0 \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 2$$

e quindi, anche ora, si parla di due tempi di dimezzamento.

- 19 -

Una sostanza radioattiva ha una costante di disintegrazione λ = 0,0693 giorni^{-1}. Dopo quanti giorni l'attività si riduce ad 1 / 8?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla definizione di costante di disintegrazione, λ, e di tempo di dimezzamento, T, si ha:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{0,0693} \Rightarrow T = 10 \text{ giorni}$$

Per avere il tempo necessario affinchè l'attività diventi 1 / 8 di quella iniziale, si può far ricorso alla formula:

$$R_{nT} = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0$$

che, in questo caso si riduce a :

$$\frac{R_{nT}}{R_0} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow R_{nT} = R_{3T} : \Rightarrow R_{3T} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 R_0$$

cioè:

$$n = 3$$

quindi debbono passare tre tempi di dimezzamento per far ridurre l'attività della sostanza ad 1 / 8 di quella iniziale:

$$t = 3\ T = 3 \cdot 10 \text{ giorni} \Rightarrow t = 30 \text{ giorni}$$

Si poteva giungere allo stesso risultato anche utilizzando la formula del decadimento radioattivo:

$$N_t = N_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_0}{8} = N_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{-\lambda t}$$

passando ai logarirmi:

$$\ln 1 - \ln 8 = -\lambda t \Rightarrow \ln 8 = \lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 8}{\lambda} = \frac{3 \ln 2}{\frac{\ln 2}{T}} = \frac{3 \ln 2}{\ln 2} T$$

da cui:

$$t = 3\ T = 30 \text{ giorni}$$

Analogamente a prima.
[N.B. per le proprietà dei logaritmi si ha che: $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$]

- 20 -

Una sostanza radioattiva è tale che dopo 20 s la sua attività è passata da 16 mCi a 8 mCi. Dopo quanto tempo l'attività si sarà ridotta a 2 mCi? In quest'istante quante disintegrazioni avvengono nell'unita' di tempo?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se in 20 s l'attività passa da 16 mCi a 8 mCi, il tempo di dimezzamento, T, di questa sostanza sarà proprio 20 s. Allora se dopo 1 T l'attività è 8 mCi, dopo un altro T, sarà 4 mCi, e dopo un terzo T, sarà 2 mCi. Allora:

$$3\ T = 3 \cdot 20\ S = 60\ s = 1 \text{ minuto.}$$

Per sapere quante disintegrazioni al secondo avvengono, basta ricordare che:

$$1\ Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ dis / s} \Rightarrow 1\ mCi = 1 \cdot 10^{-3}\ Ci = 3{,}7 \cdot 10^7 \text{ dis / s} \Rightarrow 2\ mCi = 7{,}4 \cdot 10^7 \text{ dis / s}$$

- 21 -

Una radiosorgente β^- emettitrice da 15 mCi, si trova a 3 m dalla vostra mano. Quanti elettroni attraversano ogni cm^2 di mano ogni secondo?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dato che 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ dis / s, e che, quindi 1 mCi = $3{,}7 \cdot 10^7$ dis / s, l'attività di questa radiosorgente β^-, che è di 15 mCi, in dis / s, risulta di: $15 \cdot 3{,}7 \cdot 10^7$ dis / s $\approx 5{,}6 \cdot 10^8$ dis / s.
. Se l'emissione avviene in modo isotropo, considerando una superficie sferica di raggio R che gli elettroni

attraversano : all’aumentare del raggio della sfera il numero di elettroni che arrivano per unità di superficie e di tempo è proporzionale al numero di elettroni emessi al secondo diviso la superficie della sfera di raggio R .

$$\boxed{\frac{\text{Numero di elettroni emessi per unita' di tempo dalla sorgente}}{\text{Superficie della sfera}}}$$

La mano è a 3 m dalla sorgente, essa verrà investita solo da una frazione del numero totale di elettroni che arrivano sulla sfera di raggio 3 m.
Per cui

$$S_{sfera} = 4\,\pi\,R^2 = 4\,\pi\,9\ m^2 \Rightarrow S_{sfera} = 36\,\pi \approx 113{,}1\ m^2$$

La densita’ degli elettroni che attraversano per unita’ di tempo da una superficie di tale raggio e’ data da :

$$\frac{5.6\cdot 10^8}{113.1}\ \text{elettroni}\ m^{-2}s^{-1}$$

Ora, per sapere quanti elettroni attraversano un cm^2, è sufficiente moltiplicare tale densita di elettroni per unita’ di superficie per la superficie di 1 $cm^2=10^{-4}\ m^2$. Il numero totale di elettroni per unita’ di tempo che attraversano una superficie di 1 cm^2 e’ data da :

$$\frac{5{,}6\cdot 10^8}{113.1}10^{-4} \approx 495$$

- 22 -

Quanti tempi di dimezzamento T sono trascorsi se l’attività di un radionuclide è diminuita allo 0,5 % del suo valore iniziale?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla formula:

$$R_t = R_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

essendo:

$$R_t = 0{,}5\ \%\ R_0 = \frac{5}{1000}\ R_0$$

ed anche:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

si ha:

$$\frac{5}{1000}\ R_0 = R_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \Rightarrow \frac{1}{200} = e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \Rightarrow \ln 1 - \ln 200 = -\frac{\ln 2}{T}\ t \Rightarrow \ln 200 = \frac{\ln 2}{T}\ t$$

allora:

$$t = T \frac{\ln 200}{\ln 2} \approx T \frac{5,298}{0,693} \Rightarrow t \approx 7,64\,T$$

e quindi sono passati circa 7,64 tempi di dimezzamento.

- 23 -

Dopo la somministrazione di ^{131}I l'attività misurata nella tiroide di un paziente è di 1 nCi. Dopo due settimane quale sarà l'attività emessa da questo organo? Si ricordi che il tempo di dimezzamento dello ^{131}I è T = 8 giorni.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

La formula del decadimento radioattivo:

$$R_t = R_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

dove è:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{8} \approx 8,66 \cdot 10^{-2} \text{ giorni}^{-1}$$

e:

$$R_t = R_{14\,GG} \qquad R_0 = 1 \text{ nCi}$$

quindi:

$$R_{14\,GG} = 1 \text{ nCi} \cdot e^{-8,66 \cdot 10^{-2} \cdot 14} \approx 1 \text{ nCi} \cdot e^{-1,2} \Rightarrow R_{14\,GG} \approx 0,30 \text{ nCi}$$

- 24 -

La velocità di decadimento di un campione radioattivo era di 250 $N \cdot s^{-1}$ al tempo t = 1,0 h e 175 $N \cdot s^{-1}$ al tempo t' = 3,0 h. Qual'è il tempo di dimezzamento T del nuclide campione?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Il numero dei nuclei sopravvissuti e la velocità di decadimento (attività) sono legati dalle equazioni:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

e

$$A(t) = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N_t = \frac{\ln 2}{T} N_t$$

al tempo t = 1h A_0 = 250 dis / s e
al tempo t = 3h A(t) = 175 dis / s
facendo il rapporto $A(t) / A_0$, si ottiene:

$$\frac{A(t)}{A_0} = \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{\cdot e^{-\lambda \cdot t_0}} = e^{-\lambda \cdot (t - t_0)}$$

t = 3 h
t_0 = 1 h
$t - t_0$ = 2 h = 2 · 3600 = 7200 s

passando ai numeri:

$$\frac{175}{250} = e^{-\lambda\,7200} \Rightarrow \ln\frac{175}{250} = -7200\lambda \Rightarrow \ln\ 0,7 = -7200\lambda \Rightarrow -0,36 = -7200\lambda$$

allora:

$$\lambda = \frac{0,36}{7200} = 4,95 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$

Siccome il tempo di dimezzamento, T, è dato dalla:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

si ottiene :

$$T = \frac{\ln 2}{4,95 \cdot 10^{-5}} \approx 1,4 \cdot 10^{4}\ s \Rightarrow \frac{1,4 \cdot 10^{4}}{3600} \approx 3,89\ \text{ore}$$

- 25 -

Dalla formula del decadimento radioattivo risulta che le dimensioni della costante λ coincidono con l'inverso di un tempo e quindi nel S. I. la sua unità di misura è il s^{-1}. L'uranio 238 ha una vita media di 6,5 miliardi di anni, quanto vale λ arrotondata? Presa una mole di uranio quante disintegrazioni avvengono entro il primo secondo di osservazione?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per definizione è:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{6,5 \cdot 10^{9}\ \text{anni}} \approx 1,54 \cdot 10^{-10}\ \text{anni}^{-1}$$

inoltre è:

$$\tau = 6,5 \cdot 10^{9} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 65 \cdot 10^{9} \cdot 3,15 \cdot 10^{7} = 2,0 \cdot 10^{17}\ s$$

allora:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2,0 \cdot 10^{17}} = 5,0 \cdot 10^{-18}\ s^{-1}$$

Per avere il numero degli atomi decaduti nel primo secondo di osservazione in una mole di uranio, basta fare la differenza tra il numero di atomi iniziali pari al numero di Avogadro per una mole di sostanza e il numero di atomi non ancora decaduti dopo un tempo t pari ad un secondo per cui:

$$N_0 - N(1s) = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow 6.023 \cdot 10^{23}\left(1 - e^{-5 \cdot 10^{-18}}\right)$$

QUESTO CALCOLO E' IMPOSSIBILE DA FARE CON LA CALCOLATRICE

Per Δt molto minore di τ Il numero degli atomi decaduti nell'intervallo di tempo considerato, Δt=1s,puo essere calcolato come la differenza tra quelli presenti all'inizio e quelli presenti dopo che è passato il tempo t infatti dalla definizione di attività:

$$N_0 - N = -\Delta N = A(t)\,\Delta t = \lambda N_0\,\Delta t$$

volendo, ora, sapere quante disintegrazioni avvengono entro il primo secondo di osservazione cioè $N_0 - N$, quando Δt = 1s, dalla formula vista poc'anzi, si ha:

$$N_0 - N = -\Delta N = \lambda\, N_0\, \Delta T \Rightarrow -\Delta N = 5 \cdot 10^{-18} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23} \cdot 1 = 3{,}0 \cdot 10^{6} \text{ disintegrazioni}$$

e cioè, nel primo secondo di osservazione avvengono tre milioni di disintegrazioni.

- 26 -

Si calcoli l'attività radioattiva in dis / min (disintegrazioni al minuto) di un organismo vivente per ogni grammo di carbonio contenuto in esso.
Si assuma $6 \cdot 10^{23}$ il numero di Avogadro, che il rapporto ^{14}C / ^{12}C sia uguale a $1{,}3 \cdot 10^{-12}$ e che il tempo di dimezzamento del ^{14}C sia T = 5730 anni.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Si può esprimere in minuti il tempo di dimezzamento del ^{14}C:

$$T_{14} = 5730 \text{ anni} = 5730 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ minuti} \approx 3{,}0 \cdot 10^{9} \text{ minuti}$$

da cui si ha che:

$$\lambda_{14} = \frac{\ln 2}{T_{14}} = \frac{0{,}693}{3{,}0 \cdot 10^{9}} \text{ min}^{-1} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ min}^{-1}$$

Il numero di atomi presenti in un grammo di ^{12}C, N_{12}, è:

$$N_{12} = \frac{N_A}{N_m} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{12} = 5 \cdot 10^{22}$$

in cui:

N_A = numero di Avogadro ($= 6 \cdot 10^{23}$)

N_m = numero di massa (per il ^{12}C, è 12)

ora, per il numero di atomi presenti in un grammo di ^{14}C, si ha:

$$N_{14} = {}^{14}C / {}^{12}C \cdot N_{12} = 1{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{22} \approx 6{,}5 \cdot 10^{10}$$

Poichè l'attività è data dalla:

$$R = \lambda \cdot N$$

si ha che:

$$R_{14} = \lambda_{14} \cdot N_{14} = 2{,}3 \cdot 10^{-10} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{10} \approx 1{,}5 \text{ dis min}^{-1}$$

e quindi, in un organismo vivente, l'attività di ogni grammo di ^{14}C è di circa 1,5 disintegrazioni al minuto.

- 27 -

Lo iodio 131 viene impiegato per trattare le malattie della tiroide. Il suo tempo di dimezzamento è di 8,1 giorni. Un paziente ingerisce una piccola quantità di questo iodio: calcolare la frazione che ne resta dopo 7 giorni, dopo 15 giorni e dopo 60 giorni nell'ipotesi che essa non venga espulsa dal corpo del paziente.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se il tempo di dimezzamento, T, è noto, si può trovare la costante di disintegrazione, λ:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{8{,}1} \approx 8{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ giorni}^{-1}$$

Per calcolare la frazione che rimane dopo un certo tempo t, si può ricorrere alla relazione:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

nel caso che:

1) $t = 7$ giorni, si ha:

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-8,6 \cdot 10^{-2} \cdot 7} = e^{-6,02 \cdot 10^{-1}} \approx 0,55 \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} \approx 55\,\%$$

2) $t = 15$ giorni, si ha:

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-8,6 \cdot 10^{-2} \cdot 15} = e^{-1,29} \approx 0,28 \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} \approx 28\,\%$$

3) $t = 60$ giorni, si ha:

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-8,6 \cdot 10^{-2} \cdot 60} = e^{-5,16} \approx 5,74 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} \approx 0,6\,\%$$

- 28 -

Una roccia contiene 3 nuclei di ^{207}Pb per ogni nucleo di ^{235}U. Determinare l'età della pietra, assumendo che tutto il ^{207}Pb proviene dal decadimento dell'^{235}U, il cui tempo di dimezzamento T è 0,7 miliardi di anni.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla formula del decadimento radioattivo:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

si ha che se per ogni nucleo di ^{235}U se ne trovano tre di ^{207}Pb ed il piombo proviene tutto dal decadimento dell'uranio, il tempo cercato è quello in cui su 4 nuclei solo uno è di uranio, cioè:

$$N_t = \frac{N_0}{4}$$

e quindi:

$$\frac{N_0}{4} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln 1 - \ln 4 = -\lambda t \Rightarrow \ln 4 = \lambda t$$

ricordando che:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

e

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$$

si ha:

$$2 \ln 2 = \frac{\ln 2}{T} t \Rightarrow 2 = \frac{t}{T} \Rightarrow t = 2T = 2 \cdot 7 \cdot 10^8 = 1,4 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Oppure, in modo meno rigoroso:
se tutti i nuclei di piombo provengono dal decadimento di quelli di uranio potrebbe essere sufficiente fare la seguente considerazione: all'istante iniziale, $t = 0$, non c'era neanche un nucleo di piombo; dopo un tempo di dimezzamento, $t = T$, i nuclei di uranio che sono decaduti (la metà di quelli iniziali) sono diventati di piombo, quindi, in quest'istante, si hanno il 50 % dei nuclei iniziali di ^{235}U e altrettanti di ^{207}Pb; dopo 2 tempi di dimezzamento, $t = 2\,T$, essendo decaduti metà dei nuclei di uranio rimasti, cioè un quarto di quelli iniziali, si ha che il 75 % dei nuclei totali, in tale istante, sono di piombo ed il 25 % di uranio: cioè per ogni nucleo di ^{235}U se ne trovano tre di ^{207}Pb. Allora essendo il tempo richiesto uguale a due tempi di dimezzamento sarà:

$$t = 2\,T = 2 \cdot 7 \cdot 10^8 = 1{,}4 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

- 29 -

A quanto si è ridotta l'attività di un radionuclide dopo un tempo pari a mezzo periodo di dimezzamento T ?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

dopo T / 2, ricordando la definizione di costante di disintegrazione:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Per la legge del decadimento radioattivo, l'attività, R, a un tempo pari a mezzo periodo di dimezzamento,
È data da :

$$R_t = R_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow R_{\frac{T}{2}} = R_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{T}{2}} \Rightarrow R_{\frac{T}{2}} = R_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{T}{2}}$$

e quindi:

$$\frac{R_{\frac{T}{2}}}{R_0} = e^{-\frac{\ln 2}{2}} \approx 0{,}7$$

cioè, l'attività del radionuclide in esame, dopo un tempo pari a mezzo periodo di dimezzamento, si è ridotta circa al 70% ($R_{1/2\,T} = 0{,}7\,R_0$), di quella iniziale.

- 30 -

Supponendo di avere, all'istante t = 0, 1000 nuclei radioattivi, quanti nuclei decadono nell'intervallo di tempo che intercorre tra un mezzo periodo di dimezzamento T ed una vita media τ ? Il calcolo è possibile o bisogna conoscere il valore di T o di τ, o di entrambi?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Nella legge del decadimento radioattivo,

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T}} \qquad \boxed{T = \tau \cdot \ln 2 = 0.693 \cdot \tau}$$

il numero dei nuclei sopravvissuti a un tempo pari a mezzo periodo di dimezzamento, cioè dopo T / 2, ricordando la definizione di costante di disintegrazione:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

è:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow N_{\frac{T}{2}} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{T}{2}} \Rightarrow N_{\frac{T}{2}} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{T}{2}}$$

e quindi:

$$\frac{N_{\frac{T}{2}}}{N_0} = e^{-\frac{\ln 2}{2}} \approx 0{,}7$$

cioè, dopo un tempo pari a mezzo periodo di dimezzamento, sono rimasti circa il 70% dei nuclei iniziali:

$$\text{se } N_0 = 1000 \Rightarrow N_{\frac{T}{2}} = 70\,\%\ 1000 = 700$$

Il numero dei nuclei sopravvissuti dopo una vita media, N_τ, per definizione è:

$$N_\tau = \frac{N_0}{e} \Rightarrow N_\tau = \frac{1000}{e} \approx 367{,}9 \approx 368$$

Il numero di nuclei decaduti tra T/2 e τ , e' dato dalla differenza tra il numero di nuclei non ancora decaduti al tempo T/2 il numero di nuclei rimasti al tempo $t=\tau$

$$700 - 368 = 332$$

Allo stesso risultato si poteva giungere anche per un'altra via:
sapendo che:

$$N_{\frac{T}{2}} = 70\,\%\ N_0$$

e

$$N_\tau = \frac{N_0}{e}$$

segue:

$$N_{\frac{T}{2}} - N_\tau = 70\,\%\ N_0 - \frac{N_0}{e} = \left(\frac{70}{100} - \frac{1}{e}\right) N_0 = \left(\frac{70\,e - 100}{100\,e}\right) N_0$$

passando ai valori numerici:

$$N_{\frac{T}{2}} - N_\tau = \left(\frac{70 \cdot 2{,}718 - 100}{100 \cdot 2{,}718}\right) N_0 \approx \frac{190{,}3 - 100}{271{,}8} N_0 = \frac{90{,}3}{271{,}8} N_0$$

allora:

$$N_{\frac{T}{2}} - N_\tau \approx 0{,}332\ N_0$$

e quindi se N_0 è 1000, i due risultati coincidono. Ciò significa che non è necessario, per sapere quale frazione di N_0 decade, conoscere il valore di T o di τ, o di entrambi.

- 31 -

Calcolare la frequenza massima e la lunghezza d'onda di soglia dei raggi X prodotti da elettroni accelerati tramite una differenza di potenziale elettrico di 50.000 V. Si ricordi che la carica elettrica dell'elettrone è pari a $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, e che la costante di Planck è $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s, e la velocità della luce è $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

La frequenza massima si ottiene dalla:

$$\nu_{max} = \frac{e \cdot V}{h}$$

e = carica dell'elettrone ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C)
V = differenza di potenziale che accelera gli elettroni (V = 50.000 V)

h = la costante di Planck = $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s
nella quale:
e quindi:

$$\nu_{max} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 5 \cdot 10^{4}\ V}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J\,s} \Rightarrow \nu_{max} = 1{,}21 \cdot 10^{19}\ Hz$$

essendo:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto ($c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}), risulta subito evidente che λ e ν sono inversamente proporzionali, quindi per avere λ_{min} bisogna ricorrere a ν_{max}:

$$\lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{max}} \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ m\,s^{-1}}{1{,}21 \cdot 10^{19}\ Hz} = 2{,}48 \cdot 10^{-11}\ m = 2{,}48 \cdot 10^{-1}\ \overset{0}{A}$$

- *32* -

Un topo assorbe una dose di 300 rad di protoni da 10 MeV il cui fattore EBR è pari a 0,7. Valutare la dose biologica equivalente in sievert.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poiché è:

$$1\ \text{gray} = 100\ \text{rad} \Rightarrow 1\,\text{rad} = \frac{1}{100}\,\text{gray}$$

il topo assorbe:

$$300 \cdot \frac{1}{100}\,\text{Gy} = 3\,\text{Gy}$$

Se il fattore EBR è 0,7, la dose espressa in sievert è:

$$0{,}7 \cdot 3\text{Gy} = 2{,}1\ \text{Sv}$$

- *33* -

Il ^{60}C decade, emettendo radiazione beta, con un tempo di dimezzamento di 5,27 anni, nel ^{60}Ni, che a sua volta emette raggi gamma pronti (cioè dopo un tempo quasi nullo). Questi raggi gamma sono quelli normalmente impiegati nel trattamento radioterapico dei tumori. Calcolare la massa di una radiosorgente di ^{60}C da 1000 Ci.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Utilizzando la relazione $A_0=N_0\lambda = N_0\ 0.693/T$ si puo' risalire alla massa della radiosorgente.

Se l'attività del ^{60}C deve essere di 10^{3} Ci, sapendo che 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq, l'attività di ^{60}C richiesta sarà:

$A_{^{60}C} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \cdot 10^{3} \Rightarrow A_{^{60}C} = 3{,}7 \cdot 10^{13}$ Bq. Per il tempo di dimezzamento $T = 5{,}27$ anni $= 5{,}27 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \Rightarrow T \approx 1{,}7 \cdot 10^{8}$ s

$$\lambda = \frac{0{,}693}{1{,}7 \cdot 10^{8}\ s} \approx 4{,}17 \cdot 10^{-9}\ s^{-1}$$

per avere il numero, N, degli atomi decaduti quando l'attività è $3{,}7 \cdot 10^{13}$ Bq:

$$A_{Co^{60}} = \lambda\, N \Rightarrow N = \frac{A_0}{\lambda} \Rightarrow N = \frac{3{,}7 \cdot 10^{13}\ \text{dis}\ s^{-1}}{4{,}17 \cdot 10^{-9}\ s^{-1}} \Rightarrow N \approx 8{,}87 \cdot 10^{21}$$

La massa si ricava, ricordando che $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ è il numero di Avogadro e indica quanti atomi ci sono in una mole di una qualsiasi sostanza e che una mole è il peso molecolare espresso in grammi (cioè una mole di ^{60}C consta di 60 g):

$60g:N_A=Xg:N$ d a questa proporzione si ricava

$$m_{^{60}C} = 60 \cdot \frac{N}{N_A} \Rightarrow m_{^{60}C} = 60 \cdot \frac{8{,}87 \cdot 10^{21}}{6{,}023 \cdot 10^{23}} = 60 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-2} \Rightarrow m_{^{60}C} \approx 0{,}88\ g$$

- 34 -

Per un tessuto esposto ad una sorgente radioattiva la dose assorbita in un'ora è di $4 \cdot 10^3$ rad. Se la EBR per le radiazioni emesse dalla sorgente è 0,6, quanto tempo deve trascorrere perché la dose biologica equivalente sia di 3 Sv? A quanti rem corrisponde questa dose?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se la dose assorbita (D_{ASS}) in un'ora è di $4 \cdot 10^3$ rad e la EBR = 0,6, la dose equivalente assorbita in un' ora è:

$$D_{EQ} = D_{ASS} \cdot EBR \Rightarrow D_{EQ} = 4 \cdot 10^3\ \text{rad}\ \ 0{,}6 = 2{,}4 \cdot 10^3\ \text{rem} = 24\ \text{Sv /ora}$$

(dato che 1 sievert (Sv) = 100 rem). La dose assorbita in un minuto e' data da :

$$D_{EQ}\ \text{ass in un minuto} = \frac{24}{60}\frac{Sv}{min} \Rightarrow D_{EQ} = 0{,}4\,\frac{Sv}{min}$$

Affinchè la dose biologica equivalente sia 3 Sv, il tempo che deve passare si ricava dalla:

$$\boxed{0.4Sv : 1(\text{minuti}) = 3\,Sv : t(\text{minuti})}$$

$$t = \frac{3\ Sv}{D_{EQ}} \Rightarrow t = \frac{3\ Sv}{0{,}4\ Sv\ min^{-1}} = 7{,}5\ \text{minuti}$$

Infine, come già visto, essendo:

$$1\ Sv = 100\ rem \Rightarrow 3\ Sv = 300\ rem$$

- 35 -

Dare una definizione precisa di *tempo di dimezzamento*, T, e di *vita media*, τ, in un processo radioattivo. Ricavare, mediante dimostrazione, le relazioni che intercorrono tra T e la *costante di disintegrazione* λ, e tra τ e λ.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per tempo di dimezzamento, T, s'intende il tempo necessario affinchè, in una sostanza radioattiva, il numero dei nuclei sopravvissuti, N_T , si è ridotto alla metà di quello iniziale, N_0, cioè:

$$N_T = \frac{1}{2} N_0$$

Dalla legge del decadimento radioattivo:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

si ha:

$$N_T = N_0 \cdot e^{-\lambda T} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda T$$

e quindi:

$$\ln 1 - \ln 2 = -\lambda T \Rightarrow \ln 2 = \lambda T \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

e questa è la relazione tra T e λ.
Per vita media, τ, s'intende il tempo necessario affinchè, in una sostanza radioattiva, il numero dei nuclei sopravvissuti, N_τ , si è ridotto da N_0 a N_0 / e, (nella quale " e " è la base dei logaritmi naturali) cioè:

$$N_\tau = \frac{N_0}{e}$$

Ancora dalla legge del decadimento radioattivo:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

si ha:

$$N_\tau = N_0 \cdot e^{-\lambda \tau} \Rightarrow \frac{N_0}{e} = N_0 \cdot e^{-\lambda \tau} \Rightarrow \frac{1}{e} = e^{-\lambda \tau}$$

e quindi:

$$\ln\frac{1}{e} = -\lambda \tau \Rightarrow \ln 1 - \ln e = -\lambda \tau \Rightarrow 1 = \lambda \tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$$

e questa è la relazione tra τ e λ.

- 36 -

Se la vita media di una certa sostanza radioattiva è τ = 2,886 giorni, quanti giorni si dovrà attendere prima che l'attività si riduca a 1 / 32 dell'attività iniziale?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla formula del decadimento radioattivo, e sapendo che se l'attività si riduce a 1 / 32 di quella iniziale significa che N_t si è ridotto a 1 / 32 N_0, si ha:

$$N_t = N_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{32} N_0 = N_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln 1 - \ln 32 = -\lambda t \Rightarrow 5 \ln 2 = \lambda t \Rightarrow t = \frac{5 \ln 2}{\lambda}$$

e ricordando che:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

si ha:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot 5 \ln 2 = 5 \tau \ln 2 \Rightarrow t = 5 \cdot 2{,}886 \cdot \ln 2 = 10 \text{ giorni}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere anche per un'altra via:
poichè il tempo necessario affinchè l'attività si riduca a 1 / 32 dell'attività iniziale è esattamente 5 volte il periodo di dimezzamento, cioè 5T, dato che 32 = 2^5, per rispondere alla domanda è sufficiente trovare T. Avendo la vita media,

dalle definizioni di T e di τ, si ha:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

e

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 \Rightarrow T = \tau \ln 2$$

e, quindi, il tempo richiesto è:

$$t = 5\,T = 5\,\tau \ln 2 \Rightarrow t = 5 \cdot 2{,}886 \cdot \ln 2 = 10 \text{ giorni}$$

- *37* -

Se il tempo di dimezzamento di una data sostanza radioattiva è T = 2 giorni e la sua attività iniziale è R_0 = 2718 Bq si calcoli la vita media τ e l'attività residua R dopo che è trascorso un periodo di tempo pari a τ. Quanto sarebbe l'attività residua nel caso in cui il tempo di dimezzamento fosse T = 4 giorni e conseguentemente τ due volte più grande ?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Dalla definizione di vita media,

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

e di periodo di dimezzamento

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

si ha:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow \tau \approx 2{,}886 \text{ giorni}$$

Per calcolare l'attività residua dopo che è trascorso un periodo di tempo pari a τ, si può ricorrere alla relazione:

$$R_t = R_0\, e^{-\lambda t}$$

nella quale:

$\lambda = 1 / \tau$
$R_0 =$ 2718 Bq
$t = \tau$

e quindi:

$$R_\tau = R_0\, e^{-\lambda \tau} = R_0\, e^{-\frac{1}{\tau}\tau} \Rightarrow R_\tau = 2718\, e^{-1} = 2718\,\frac{1}{2{,}718} \Rightarrow R_\tau = 1000 \text{ Bq}$$

Essendo $R_\tau = R_0\, e^{-1}$, è indipendente da T e quindi rimane invariato al variare del periodo di dimezzamento e della vita media.

- *38* -

Attualmente, in Italia, la dose equivalente massima di radiazione per una persona professionalmente esposta (PE) è di 5 rem / anno. Un'infermiera, nonostante le schermature, riceve una dose di radiazioni di 0,001 Sv ogni volta che adopera una certa sorgente radioattiva per applicazioni mediche. Quante volte in un anno può esserle permesso di adoperare tale sorgente? Se l'*efficacia biologica relativa* (EBR) della radiazione usata è 0,5 si calcoli la dose assorbita in rad per ogni esposizione.

——— * ——— SOLUZIONE ——— * ———

Poichè è:

$$1\ \text{Sv} = 100\ \text{rem}$$

si ha che:

$$1\ \text{rem} = 0.01\ \text{Sv} \Rightarrow 5\ \text{rem} = 0{,}05\ \text{Sv}$$

e questa è la dose in Sv / anno consentita. Per sapere quante volte l'infermiera può adoperare la sorgente, bisogna dividere la dose massima consentita all'anno per la dose che riceve ad ogni applicazione:

$$N = \frac{0{,}05}{0{,}001} = 50\ \text{volte}$$

La dose equivalente assorbita espressa in rem è data da:

0.001 Sv =0.1 rem

Ricordando la definizione di dose equivalente espressa in funzione della dose assorbita e dell'efficacia biologica relativa del tipo di radiazione utilizzata
Deq(Sv) =D(Gy)x EBR

$$D = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2\ \text{rad}$$

- 39 -

Per definizione 1 rem di radiazione di qualsiasi tipo determina lo stesso danno biologico che è quello prodotto da 1 rad di radiazione con EBR = 1 (per esempio raggi β). E' più dannoso assorbire 100 rad di protoni (EBR = 2) oppure 1 Gy di particelle α (EBR = 20) e quanto maggiore è il danno.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per i protoni:

$$H_p = E.B.R \cdot D_p \Rightarrow H_p = 2 \cdot 100\text{rem} \Rightarrow H_p = 200\ \text{rem}$$

mentre per le particelle α:

$$H_\alpha = Q_\alpha \cdot D_\alpha \Rightarrow H_\alpha = 20 \cdot 100 \Rightarrow H_\alpha = 2000\ \text{rem}$$

quindi è è più dannoso assorbire 1 Gy di particelle α (EBR = 20) che 100 rad di protoni (EBR = 2), e per valutare di quanto è maggiore il danno, bisogna fare il rapporto:

$$\frac{H_\alpha}{H_p} = \frac{2000}{200} = 10 \Rightarrow H_\alpha = 10 H_p$$

cioè è 10 volte più dannoso assorbire 1 Gy di particelle α (EBR = 20) che 100 rad di protoni (EBR = 2).

- 40 -

Esistono delle particelle di materia che risultano essere costituite da un quark e dal suo antiquark. Si può dire di che segno è la carica di queste particelle senza conoscere di che tipo sono i quark?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Le cariche di queste particelle elementari sono sempre opposte e quindi tali particelle di materia sono elettricamente neutre.

- 41 -

Supponiamo che una persona, esposta a radiazioni ionizzanti, abbia assorbito in un tempo brevissimo una dose di 10^3 rad. Quanta energia (in joule) ha assorbito un grammo di tessuto? Sapendo che l'equivalente meccanico della caloria è 4,19 joule / cal si dica (trascurando i decimali) la quantità di calore assorbita da un g di tessuto. Ricordando, infine, che il calore specifico dei tessuti è circa uguale a quello dell'acqua (c = 1 cal / g °C) si calcoli l'innalzamento termico di un grammo di tessuto.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Sapendo che:

$$1\,\text{rad} = 10^{-2}\ \text{Gy} = 10^{-2}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \Rightarrow 10^3\ \text{rad} = 10^3 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 10\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

e che: 1 kg = 10^3 g , si ha:

$$10\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 10\ \frac{\text{J}}{10^3\ \text{g}} \Rightarrow 10^3\ \text{rad} = 10^{-2}\ \frac{\text{J}}{\text{g}}$$

e quindi un grammo di tessuto ha assorbito un'energia pari a 10^{-2} J.
Per la quantità di calore assorbita da un grammo di tessuto, Q, avendo l'energia assorbita (E = 10^{-2} J), conversione tra l'energia assorbita ed il calore (F = 4,19 joule / cal), si ha:

$$Q = \frac{E}{F} \Rightarrow Q = \frac{10^{-2}\ \text{J}}{4{,}19\ \text{J/cal}} = \frac{10^{-2}}{4{,}19}\ \text{cal} \approx 2 \cdot 10^{-3}\ \text{cal}$$

Calcolo, infine, dell'innalzamento termico di 1 g di tessuto, Δt, che è:

$$\Delta t = \frac{Q}{m\,c} \Rightarrow \Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-3}\ \text{cal}}{1\ \text{g} \cdot 1\ \text{cal}/\text{g}\ {}^\circ\text{C}} = 2 \cdot 10^{-3}\ {}^\circ\text{C}$$

- 42 -

Una sorgente radioattiva ha un periodo di dimezzamento di 1 ora (cioè: T = 1 h). All'istante t = 0 essa viene posta vicino ad un rivelatore, e si misura una frequenza di conteggio R_0 = 2048 eventi / s (Bq). Si trovino la costante di decadimento λ e le frequenze di conteggio R_1, R_2, R_3, R_{10} negli istanti t = 1 h, 2 h, 3 h, e 10 h.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se T = 1 h, si può trovare subito il valore della costante di decadimento dato dalla relazione:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{1} \Rightarrow \lambda = 0{,}693\ \text{h}^{-1}$$

oppure:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{3600} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$$

R_1: t = 1 h. Siccome è esattamente un tempo di dimezzamento, si ha che il conteggio sarà la metà di quello al tempo t = 0:

$$R_1 = \frac{R_0}{2} = \frac{2048}{2} \Rightarrow R_1 = 1024\ \text{dis s}^{-1}$$

R_2: $t = 2$ h. Siccome si hanno tempi di dimezzamento esatti, si può usare la formula:

$$R_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0$$

Quindi ripetendo il caso di R_1 e calcolando R_2, R_3 ed R_{10}, si ha:

$$R_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 R_0 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2048 = 1024 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

$$R_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 R_0 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2048 = 512 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

$$R_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 R_0 = \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 2048 = 256 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

....

$$R_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} R_0 = \left(\frac{1}{1024}\right) \cdot 2048 \approx 2 \text{ dis s}^{-1} \text{ (Bq)}$$

- 43 -

Una soluzione contenente radiofosforo ^{32}P, che è un nucleo β-emittente, circonda un contatore Geiger che registra 10^3 conteggi al minuto. se la stessa misura viene eseguita 30 giorni più tardi, si trova una velocità di conteggio di 325 conteggi al minuto. Tenendo presente che il Geiger in assenza di soluzione registra 100 conteggi al minuto si dia una stima del periodo di dimezzamento.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Poichè il Geiger, in assenza della soluzione registra 100 conteggi al minuto, per conoscere l'attività di essa, bisogna sottrarre dal conteggio "l'attività di fondo":

C_0 =	$10^3 = 1000$	conteggi al minuto
R_0 =	$1000 - 100 = 900$	conteggi al minuto
C_t =	325	conteggi al minuto
R_t =	$325 - 100 = 225$	conteggi al minuto

Dalla legge del decadimento radioattivo:

$$R_t = R_0 \, e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln\frac{R_t}{R_0} = -\lambda t$$

da cui:

$$\lambda = -\frac{1}{t} \ln\frac{R_t}{R_0} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{30} \ln\frac{225}{900} = -\frac{1}{30} \ln 0,25 = -\frac{1}{30}(-1,39) = 0,046$$

e quindi:

$$\lambda = 0,046 \text{ giorni}^{-1}$$

Allora, poichè è:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0,046} = 15 \text{ giorni}$$

- 44 -

Se la vita media di una certa sostanza radioattiva è τ = 1,443 giorni, quanti giorni si dovrà attendere prima che l'attività si riduca a 1/64 dell'attività iniziale? Se necessario fare un piccolo arrotondamento.

——— * ——— SOLUZIONE ——— * ———

La formula del decadimento radioattivo,

$$R_t = R_0\, e^{-\lambda t}$$

in questo caso, con $R_t = R_0/64$, diventa:

$$\frac{R_0}{64} = R_0\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{64} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln 1 - \ln 64 = -\lambda t \Rightarrow -\ln 64 = -\lambda t \Rightarrow 6 \ln 2 = \lambda t$$

essendo:

$\ln 1 = 0$
$64 = 2^6$
$\ln 2^6 = 6 \ln 2$;

essendo, inoltre dalle loro definizioni:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad e \quad \lambda = \frac{1}{\tau}$$

si ha che:

$$6 \ln 2 = \frac{t}{\tau} \Rightarrow t = 6\, \tau \ln 2 = 6 \cdot 1,443 \cdot 0,693 \approx 6 \Rightarrow t = 6 \text{ giorni}$$

essendo τ espresso in giorni.

Allo stesso risultato si poteva giungere anche notando subito che $64 = 2^6$ e, quindi, sono necessari 6 tempi di dimezzamento, cioè:

$$t = 6\, T$$

Per calcolare T, sapendo che:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad e \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \tau = \frac{T}{\ln 2} \Rightarrow T = \tau \ln 2 \Rightarrow T = 1,443 \cdot 0,693 \approx 1$$

da cui:

$$T = 1 \text{ giorno}$$

e, quindi:

$$t = 6 \text{ giorni}$$

- 45 -

Per un tessuto esposto ad una sorgente radioattiva la dose assorbita in un'ora è di $5 \cdot 10^3$ rad. Se la EBR per le radiazioni emesse dalla sorgente è 0,6, quanto tempo deve trascorrere perchè la dose biologica equivalente sia di 5 sievert? E perchè sia di 250 rem?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se la dose assorbita (D_{ASS}) è di $5 \cdot 10^3$ rad / h, e la EBR = 0,6, la dose equivalente è:

$$D_{EQ} = D_{ASS} \cdot EBR \Rightarrow D_{EQ} = 5 \cdot 10^3 \text{ rad / h} \cdot 0,6 = 3,0 \cdot 10^3 \text{ rem / h} = 30 \text{ Sv / h}$$

(dato che 1 sievert (Sv) = 100 rem). Sarà, inoltre:

$$D_{EQ} = 30 \text{ Sv h}^{-1} = \frac{30}{60} \Rightarrow D_{EQ} = 0,5 \text{ Sv min}^{-1}$$

Affinchè la dose biologica equivalente sia 5 Sv, il tempo che deve passare sarà:

$$t = \frac{5 \text{ Sv}}{D_{EQ}} \Rightarrow t = \frac{5 \text{ Sv}}{0,5 \text{ Sv min}^{-1}} = 10 \text{ minuti}$$

E dato che 1 Sv = 100 rem, si ha che 250 rem = 2,5 Sv, e quindi:

$$t = \frac{2,5 \text{ Sv}}{D_{EQ}} \Rightarrow t = \frac{2,5 \text{ Sv}}{0,5 \text{ Sv min}^{-1}} = 5 \text{ minuti}$$

- 46 -

Supponendo di avere, all'istante t = 0, 1000 nuclei radioattivi, quanti nuclei decadono nell'intervallo di tempo che intercorre tra un periodo di dimezzamento T ed una vita media τ ? Il calcolo è possibile o bisogna conoscere il valore di T o di τ, o di entrambi?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Il numero dei nuclei sopravvissuti dopo un tempo di dimezzamento, N_T, per definizione è:

$$N_T = \frac{N_0}{2} \Rightarrow N_T = \frac{1000}{2} = 500 \text{ nuclei}$$

Mentre il numero dei nuclei sopravvissuti dopo una vita media, N_τ, per definizione è:

$$N_\tau = \frac{N_0}{e} \Rightarrow N_\tau = \frac{1000}{e} \approx 368$$

Per trovare il numero richiesto, è sufficiente sottrarre N_τ a N_T:

$$500 - 368 = 132$$

Allo stesso risultato si poteva giungere anche per un'altra via:
sapendo che:

$$N_T = \frac{N_0}{2} \quad \text{e} \quad N_\tau = \frac{N_0}{e}$$

segue:

$$N_T - N_\tau = \frac{N_0}{2} - \frac{N_0}{e} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) N_0 = \left(\frac{e - 2}{2\,e} \right) N_0 =$$

$$= \left(\frac{2,718 - 2}{2 \cdot 2,718} \right) N_0 \approx \frac{0,718}{5,44} N_0 \approx 0,132 \; N_0 \Rightarrow N_T - N_\tau \approx 0,132 \; N_0$$

e quindi se N_0 è 1000, i due risultati coincidono. Ciò significa che non è necessario, per sapere quale frazione di N_0 decade, conoscere il valore di T o di τ, o di entrambi.

- 49 -

Quanti periodi di dimezzamento sono trascorsi se l'attività di un radionuclide si è ridotta di un fattore 1024?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Sappiamo che ad ogni periodo di dimezzamento l'attivita' si riduce secondo la :

$$\boxed{A(nT) = A_0 e^{-\lambda nT} = A_0 e^{(-\lambda T)n} = A_0 \left(e^{-\lambda T}\right)^n = A_0 e^{-n \ln 2} = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Nel nostro caso:

$$\boxed{A(nT) = \frac{A_0}{1024} = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad \boxed{\frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ed essendo per ipotesi:

$$R_{nt} = \frac{1}{1024} R_0$$

si ha:

e quindi:

$$n = 10$$

E quindi sono passati 10 periodi di dimezzamento: 10 T.
OPPURE
Per una via più rigorosa, ricorrendo alla:

$$R_t = R_0 e^{-\lambda t}$$

che in questo caso dventa:

$$R_{nT} = R_0 e^{-\lambda nT}$$

e quindi, ricordando che, per definizione, è $T = \ln 2 / \lambda$, si ha:

$$R_{nT} = \frac{R_0}{1024} = R_0 e^{-\lambda n T}$$

e quindi:

$$R_{nT} = \frac{1}{1024} = e^{-\lambda n \frac{\ln 2}{\lambda}} \Rightarrow \ln 1 - \ln 1024 = -n \ln 2 \Rightarrow 10 \ln 2 = n \ln 2$$

allora è n = 10 in accordo col risultato precedente.

- 48 -

Supponendo di avere, all'istante t = 0, 1000 nuclei radioattivi, quanti nuclei decadono nell'intervallo di tempo che intercorre tra un periodo di dimezzamento T ed una vita media τ ? Il calcolo è possibile o bisogna conoscere il valore di T o di τ, o di entrambi?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Per la legge del decadimento radioattivo, il numero dei nuclei sopravvissuti dopo un tempo pari a un periodo di dimezzamento, cioè dopo un tempo T, è:

$$N_T = N_0 / 2$$

e cioè:

$$N_T = 500$$

cioè, dopo un tempo pari a un periodo di dimezzamento, sono rimasti la metà dei nuclei iniziali:

se $N_0 = 1000$, si ha che $N_T = 500$.

Il numero dei nuclei sopravvissuti dopo una vita media, N_τ, per definizione è:

$$N_\tau = \frac{N_0}{e} \Rightarrow N_\tau = \frac{1000}{e} \approx 368$$

Per trovare il numero richiesto, è necessario sottrarre N_τ a N_T:

$$500 - 368 = 132$$

Allo stesso risultato si poteva giungere anche per un'altra via:
sapendo che:

$$N_T = \frac{1}{2} N_0 \quad e \quad N_\tau = \frac{N_0}{e}$$

si ottiene:

$$N_T - N_\tau = \frac{1}{2} N_0 - \frac{N_0}{e} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) N_0 = \left(\frac{e - 2}{2\,e} \right) N_0 = \frac{0,718}{5,437} N_0 \approx 0,132\, N_0$$

e quindi se N_0 è 1000, i due risultati coincidono. Ciò significa che non è necessario, per sapere quale frazione di N_0 decade, conoscere il valore di T o di τ, o di entrambi.

- 49 -

Una lastra di piombo dello spessore di 5,5 mm scherma un'apparecchiatura per raggi γ, riducendo l'intensità di un fascio γ alla metà dell'intensità incidente. Quale spessore di piombo è in grado di ridurre di 16 volte l'intensità della stessa radiazione?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Se con lo spessore x = 5,5 mm si riduce l'intensità del fascio alla metà di quella incidente:

$$I_x = \frac{1}{2} I_0 = I_0\, e^{-\mu x}$$

inoltre:

$$I_{2x} = I_0 e^{-\mu x 2} = I_0 \left(e^{-\mu x}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 I_0$$

Iterando il ragionamento si giunge alla formula:

$$I_{nx} = I_0 e^{-\mu x n} = I_0 \left(e^{-\mu x}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_0$$

In questo caso si ha:

$$I_{nx} = 1/16\, I_0$$

Da questa relazione :

$$I_{nx} = 1/16\ I_0 = 1/2^{\,n}\ I_0$$

Si ottiene, essendo $16 = 2^4$:

$$1/16 = 1/2^{\,n} \Rightarrow 2^{\,n} = 16 \Rightarrow n = 4$$

e lo spessore di piombo che riduce di 16 volte l'intensità della radiazione incidente, è pari a 4x:

$$x_{1/16} = 4 \cdot 5{,}5\ \text{mm} \Rightarrow x_{1/16} = 22\ \text{mm}$$

- 50 -

Ad un paziente viene iniettato per via endovenosa un volume V_{alb} = 5 ml di albumina marcata con ^{131}I, con un'attività A_T = 1,5 kBq. Prelevando, dopo un tempo sufficiente affinchè l'albumina si distribuisca uniformemente nel sangue (circa 15 minuti), un campione di 5ml di sangue dal paziente, si misura un'attività di 1,25 Bq. Da tale misura si può dedurre il volume sanguigno totale, V_{sangue}, del paziente? Serve sapere che il tempo di dimezzamento dello ^{131}I è di circa 15 giorni?

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Si può notare subito che se il prelievo viene effettuato dopo 15 minuti, sapendo che il periodo di dimezzamento dello ^{131}I è di 15 giorni, quindi di gran lunga più lungo, l'attività, in questo caso, si può considerare indipendente dal tempo (E' quindi necessario conoscere il periodo di dimezzamento per poter assumere l'attivita' costante).

$$\frac{V_{sangue} + V_{alb}}{V_{prelievo}} = \frac{A_T}{A} \Rightarrow \frac{V_{sangue}}{V_{prelievo}} = \frac{A_T}{A} - 1 \Rightarrow V_{sangue} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{litri}\left(\frac{1{,}5 \cdot 10^3\ \text{Bq}}{1{,}25\ \text{Bq}} - 1\right) \cong 6\ \text{litri}$$

- 51 -

Elencare le unità di misura dell'attività di una sorgente radioattiva, la loro definizione e la loro relazione.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Le unità di misura dell'attività di una sorgente radioattiva sono il Bequerel, Bq, ossia l'attività di una disintegrazione al secondo, ed il curie, Ci, ossia l'attività di un grammo di Ra^{226}, cioè $3{,}7 \cdot 10^{10}$ disintegrazioni al secondo. Cioè:

$$1\ \text{Bq} = 1\ \text{dis/s}$$

$$1\ \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{dis/s} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq}$$

$$1\text{Bq}=1/(3{,}7 \cdot 10^{10})\ \text{Ci}$$

ed alcuni sottomultipli:

$$1\ \text{mCi} = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{7}\ \text{dis/s} = 3{,}7 \cdot 10^{7}\ \text{Bq}$$

$$1\ \mu\text{Ci} = 1 \cdot 10^{-6}\ \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{4}\ \text{dis/s} = 3{,}7 \cdot 10^{4}\ \text{Bq}$$

- 52 -

Scrivere le relazioni generiche che descrivono un decadimento α ed un decadimento β.

——— * ——— *SOLUZIONE* ——— * ———

Il decadimento α può essere rappresentato, in generale, da:

$$X_Z^A \xrightarrow{\alpha} Y_{Z-2}^{A-4} + \alpha (= He_2^4)$$

In cui:
Z è il numero atomico, cioè il numero di protoni nel nucleo
A è il numero di massa, cioè il numero dei protoni più quello dei neutroni nel nucleo
Quando un nucleo X decade, la particella α (che altri non e' che un nucleo di He) emessa ha uno spetto monoenergetico.
Esistono due tipi di decadimento β che possono essere rappresentati, in generale, da:

dec. β^- $$X_Z^A \xrightarrow{\beta^-} Y_{Z+1}^A + e^- + \bar{\nu}_e$$

dec. β^+ $$X_Z^A \xrightarrow{\beta^+} Y_{Z-1}^A + e^+ + \nu_e$$

in cui con X è rappresentato il nucleo che decade, con Y quello "discendente", con e^+ un positrone (particella con la carica dell'elettrone, ma positiva), con e^-, un elettrone, con ν_e, un neutrino, e con $\bar{\nu}_e$ un antineutrino dell'e^-.
Nell'emissione β^- un neutrone di X all'interno del nucleo si converte in un protone emettendo un elettrone ed un antineutrino, nell'emissione β^+ un protone all'interno di un nucleo X si converte in un neutrone emettendo un positrone ed un neutrino. Lo spettro degli elettroni o dei positroni emessi e' continuo