Metodo dei minimi quadrati

Questo metodo di *fit* utilizza il principio dei minimi quadrati per ottimizzare i parametri della funzione $y = f(x)$ candidata ad adattarsi ai dati sperimentali $\{X_i\ ,\ Y_i\}$.

La differenza D_i tra il valore misurato Y_i ed il valore previsto dalla curva a partire dal valore misurato X_i pari a $f(X_i)$ può avere un valore sia positivo che negativo che nullo.

Il **principio dei minimi** quadrati richiede che i parametri della funzione $f(x)$ siano scelti in modo da rendere minima la somma dei quadrati delle differenze D_i

$$S \equiv \sum_{1}^{N} Di^2 = \text{minimo}$$

Si osservi che questo principio tratta tutti i dati sperimentali X_i allo stesso modo, cosa che è accettabile solo le misure sono ugualmente precise, ovvero se hanno tutte un errore relativo dello stesso ordine di grandezza. Inoltre, l'errore sui valori previsti $f(X_i)$ deve essere trascurabile rispetto agli errori di misura sui dati Y_i

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{X_i} \Delta X_i << \Delta Y_i$$

Fit di una retta con il metodo dei minimi quadrati

Siano $\{X_i\ ,\ Y_i\}$ un insieme di N misure e si ipotizzi un andamento lineare con

$$f(x) = a + bx$$

Per trovare i migliori valori dei parametri a e b che tali che la funzione descriva nel modo migliore possibile i dati sperimentali si utilizza un metodo matematico opportuno (metodo dei moltiplicatori di Lagrange) che a partire dalla grandezza che si vuole minimizzare, la somma S dei quadrati degli scarti tra il valore previsto dalla retta e quello misurato

$$S = \sum_{1}^{N} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{1}^{N} \left(y_i - a - bx_i\right)^2$$

permette di individuare i parametri opportuni. Si osservi che questa grandezza è una funzione a più variabili, in particolare dipende sia da a che da b.

Per trovare il minimo di questa funzione basta variare a e b in modo che la derivata parziale di S si annulli

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{1}^{N}{}_i \left(y_i - a - bx_i\right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{1}^{N}{}_i \left(y_i - a - bx_i\right)x_i = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema di due equazioni in due incognite le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum_i y_i \sum_i x_i^2 - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \end{cases}$$

Utilizzando le regole per la propagazione degli errori si ottengono come incertezze sui parametri così determinati le seguenti espressioni

$$\begin{cases} (\Delta a)^2 = \dfrac{(\Delta y)^2 \sum_i x_i^{\ 2}}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \\ (\Delta b)^2 = \dfrac{(\Delta y)^2 N}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \end{cases}$$